1) (1p) Demuestra que [A+B]'=A'+B'.

2) (1p) Define:

a) Matriz triangular.

b) Rango de una matriz.

3) (1p) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius.

4) (2p) Discute y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} ax+ay+az=a \\ x+ay+az=a \\ ax+a^2y+z=a^2-a+1 \end{cases}$$

5) (1,4p) Si x=1+2a-4b+2c, y=a-2b+c y z=1+3a-6b+3c:

a) Elimina los parámetros.

b) Resuelve el sistema obtenido en el apartado anterior y expresa su solución en forma paramétrica.

6) (1,2p) Dada la matriz A, calcula A^n:

$$A=\begin{pmatrix} n & 1 & 1 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

7) (1,2p) Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n que verifican A·B-B·A=I, donde I es la matriz unidad correspondiente, demuestra que $A^2\cdot B-B\cdot A^2=2\cdot A$.

8) (1,2p) Calcula la inversa de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4: Discute y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} ax+ay+az=a \\ x+ay+az=a \\ ax+a^2y+z=a^2-a+1 \end{cases}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a & a & a \\ 1 & a & a & a \\ a & a^2 & 1 & a^2-a+1 \end{array}\right) \underset{\sim}{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a^2 & 1 & a^2-a+1 \end{array}\right) \underset{\sim}{2} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & a & a & a \\ 0 & \mathbf{a-a^2} & a-a^2 & a-a^2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1-a^2} & 1-a \end{array}\right) \xrightarrow{3}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a-a^2=0 \\ 1-a^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1-a)=0 \\ (1-a)(1+a)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-1, el sistema es incompatible:[4]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

2º) Si a=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:[5]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\alpha \\ z=1 \end{cases}$$

3º) Si a=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & a \\ 0 & a-a^2 & a-a^2 & a-a^2 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \underset{\sim}{6} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+a & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+ay+az=a \\ y+z=1 \\ (1+a)z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{1+a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=1-\frac{1}{1+a}=\frac{1+a-1}{1+a} \Rightarrow \boxed{y=\frac{a}{1+a}} \Rightarrow x=a-\frac{a^2}{1+a}-\frac{a}{1+a}=\frac{a+a^2-a^2-a}{1+a} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

---

1 $1^a f \leftrightarrow 2^a f$.
2 $2^a f - a\cdot 1^a f$; $3^a f - a\cdot 1^a f$.
3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 4º).
4 Ya que la última ecuación es incompatible.
5 Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.
6 Como $0\neq a\neq 1$, podemos dividir la segunda fila por $a-a^2$ y la tercera por $1-a$.

Ejercicio 5: *Si $x=1+2a-4b+2c$, $y=a-2b+c$ y $z=1+3a-6b+3c$:* ***a)*** *elimina los parámetros;* ***b)*** *resuelve el sistema obtenido en el apartado anterior y expresa su solución en forma paramétrica.* *(1,4 PUNTOS)*

* * *

Solución:

a) Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2a-4b+2c=x-1 \\ a-2b+c=y \\ 3a-6b+3c=z-1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & x-1 \\ 1 & -2 & 1 & y \\ 3 & -6 & 3 & z-1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & y \\ 2 & -4 & 2 & x-1 \\ 3 & -6 & 3 & z-1 \end{array}\right) \overset{2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & x-2y-1 \\ 0 & 0 & 0 & -3y+z-1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x-2y-1=0 \\ -3y+z-1=0 \end{cases}$$

b) Como el sistema resultante es escalonado, puede resolverse directamente:

$$\begin{cases} x-2y-1=0 \\ -3y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ z=1+3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+3\alpha \end{cases}$$

---

1 $1^a f \leftrightarrow 2^a f$.

2 $2^a f - 2\cdot 1^a f$; $3^a f - 3\cdot 1^a f$.

Ejercicio 6: *Dada la matriz A, calcula A^n:*

$$A=\begin{pmatrix} n & 1 & 1 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$A^1=\begin{pmatrix} n & 1 & 1 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} n & 1 & 1 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} n & 1 & 1 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n^2 & 2n & 2n \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} n & 1 & 1 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} n^2 & 2n & 2n \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n^3 & 3n^2 & 3n^2 \\ 0 & n^3 & 0 \\ 0 & 0 & n^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{pmatrix} n & 1 & 1 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} n^3 & 3n^2 & 3n^2 \\ 0 & n^3 & 0 \\ 0 & 0 & n^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n^4 & 4n^3 & 4n^3 \\ 0 & n^4 & 0 \\ 0 & 0 & n^4 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^n=\begin{pmatrix} n^n & n\cdot n^{n-1} & n\cdot n^{n-1} \\ 0 & n^n & 0 \\ 0 & 0 & n^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n^n & n^n & n^n \\ 0 & n^n & 0 \\ 0 & 0 & n^n \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7: *Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n que verifican $A\cdot B-B\cdot A=I$, donde I es la matriz unidad correspondiente, demuestra que $A^2\cdot B-B\cdot A^2=2\cdot A$.* *(1,2 PUNTOS)*

* * *

Solución:

$$A\cdot B-B\cdot A=I \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} A\cdot(A\cdot B-B\cdot A)=A\cdot I \\ (A\cdot B-B\cdot A)\cdot A=I\cdot A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^2\cdot B-A\cdot B\cdot A=A \\ A\cdot B\cdot A-B\cdot A^2=A \end{cases} \overset{2}{\Rightarrow} A^2\cdot B-B\cdot A^2=2A$$

[1] Multiplicamos por la izquierda y por la derecha los dos miembros de la identidad por A.
[2] Sumamos miembro a miembro ambas identidades.

Ejercicio 8: Calcula la inversa de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{1}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 6 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{2}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{3}{\approx}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{4}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2+0 & -3+3+0 & 0+0+0\\ 2-2+0 & -2+3+0 & 0+0+0\\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1 2ªf·3.
2 2ªf-2·1ªf.
3 1ªf-2ªf.
4 1ªf·1/3.