1) (1p) Define:

a) Sistemas equivalentes.

b) Matrices equivalentes.

2) (1p) Enuncia las propiedades de la trasposición de matrices.

3) (1p) Prueba que si A es inversible y $A \cdot X = I$, entonces $X = A^{-1}$.

4) (2p) Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro k y resuélvelo, en su caso, expresando la solución en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ kx-y+z=k \\ x-ky+3z=k \end{array}\right\}$$

5) (1,6p) Si $x=1-\alpha+\beta-\gamma$, $y=\alpha+\beta+\gamma$ y $z=\alpha-\beta+\gamma$:

a) Elimina los parámetros.

b) Resuelve el sistema obtenido en el apartado anterior y expresa su solución en forma vectorial.

6) (1,6p) Si $B^k=0$, prueba que $(I-B)^{-1}=I+B+B^2+\ldots+B^{k-1}$.

(NOTA: B es una matriz cuadrada de orden n, 0 es la matriz nula de orden n e I es la matriz unidad de dicho orden).

7) (1,8p) Calcula la matriz X y comprueba el resultado si:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4: *Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro k y resuélvelo, en su caso, expresando la solución en forma paramétrica:*

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ kx-y+z=k \\ x-ky+3z=k \end{array}\right\}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ k & -1 & 1 & k \\ 1 & -k & 3 & k \end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1-k & 1+k & 0 \\ 0 & -1-k & 4 & k-1 \end{array}\right) \overset{2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-1-k} & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3-k} & k-1 \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -1-k=0 \\ 3-k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-1 \\ k=3 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si k=-1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ 4z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y-1/2 \\ z=-1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/2-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1/2 \end{cases}$$

2º) Si k=3, el sistema es incompatible:[4]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ -(1+k)y+(1+k)z=0 \\ (3-k)z=k-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=\frac{k-1}{3-k}} \Rightarrow -(1+k)y=-(1+k)\cdot\frac{k-1}{3-k} \Rightarrow \boxed{y=\frac{k-1}{3-k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-\frac{k-1}{3-k}+\frac{k-1}{3-k} \Rightarrow \boxed{x=1}$$

1 2ªf-k·1ªf; 3ªf-1ªf.
2 3ªf-2ªf.
3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).
4 Ya que la última ecuación es incompatible.

Ejercicio 5: *Si $x=1-\alpha+\beta-\gamma$, $y=\alpha+\beta+\gamma$ y $z=\alpha-\beta+\gamma$:* ***a)*** *elimina los parámetros;* ***b)*** *resuelve el sistema obtenido en el apartado anterior y expresa su solución en forma vectorial.* *(1,6 PUNTOS)*

* * *

Solución:

a) Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{cases}-\alpha+\beta-\gamma=x-1\\ \alpha+\beta+\gamma=y\\ \alpha-\beta+\gamma=z\end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & -1 & x-1\\ 1 & 1 & 1 & y\\ 1 & -1 & 1 & z\end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & -1 & x-1\\ 0 & 2 & 0 & x+y-1\\ 0 & 0 & 0 & x+z-1\end{array}\right) \to x+z-1=0$$

b) Como el sistema es de una sola ecuación, la solución es inmediata:

$$x+z-1=0 \Rightarrow x=1-z \Rightarrow \begin{cases}x=1-b\\ y=a\\ z=b\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

[1] 2ªf+1ªf; 3ªf+1ªf.

Ejercicio 6: *Si $B^k=0$, prueba que $(I-B)^{-1}=I+B+B^2+\ldots+B^{k-1}$.*
(NOTA: B es una matriz cuadrada de orden n, 0 es la matriz nula de orden n e I es la matriz unidad de dicho orden). *(1,6 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Aplicamos la definición de matriz inversa:

- $(I-B)\cdot(I+B+B^2+\ldots+B^{k-1})=I^2+IB+IB^2+\ldots+IB^{k-1}-BI-B^2-B^3-\ldots-B^{k-1}-B^k=$

$$=I+B+B^2+\ldots+B^{k-1}-B-B^2-B^3-\ldots-B^{k-1}-B^k=I-B^k \stackrel{1}{=} I$$

- $(I+B+B^2+\ldots+B^{k-1})\cdot(I-B)=I^2-IB+BI-B^2+B^2I-B^3+\ldots+B^{k-1}I-B^k=$

$$=I-B+B-B^2+B^2-\ldots-B^{k-1}+B^{k-1}-B^k=I-B^k \stackrel{1}{=} I$$

Por tanto, I-B es la inversa de $I+B+B^2+\ldots+B^{k-1}$.

[1] Ya que $B^k=0$.

Ejercicio 7: *Calcula la matriz X y comprueba el resultado si:*

$$X\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\3&2&-1\end{pmatrix}$$ *(1,8 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Trasponemos los dos miembros de la ecuación matricial:

$$X\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\3&2&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&1\\1&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot X'=\begin{pmatrix}2&3\\-1&2\\3&-1\end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}0&1&1&2&3\\1&-1&1&-1&2\\0&0&1&3&-1\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&1&-1&2\\0&1&1&2&3\\0&0&1&3&-1\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&0&-4&3\\0&1&0&-1&4\\0&0&1&3&-1\end{array}\right)\overset{3}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&-5&7\\0&1&0&-1&4\\0&0&1&3&-1\end{array}\right)\rightarrow X'=\begin{pmatrix}-5&7\\-1&4\\3&-1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-5&-1&3\\7&4&-1\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}-5&-1&3\\7&4&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1+3&-5+1+3&0+0+3\\0+4-1&7-4-1&0+0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\3&2&-1\end{pmatrix}$$

* * *

También puede hacerse de la siguiente manera. Si X·A=B es la ecuación planteada, se puede calcular la inversa de A por el método de Gauss y despejar X:

$$X\cdot A=B\Rightarrow X=B\cdot A^{-1}$$

1 1ªf↔2ªf.
2 2ªf-3ªf; 1ªf-3ªf.
3 1ªf+2ªf.