

1) (1p) Define rango de una matriz.

2) (1p) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius.

3) (1p) Enuncia las propiedades de las matrices inversibles.

4) (2p) Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro k y resuélvelo, en su caso, expresando la solución en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x+2ky+z=1 \\ x+3ky+2z=2 \\ x+2ky+kz=k^2 \end{cases}$$

5) (2p) Si $x=\alpha+\beta+3\gamma$, $y=1-\alpha+\beta+\gamma$ y $z=\alpha+2\beta+5\gamma$:

a) Elimina los parámetros.

b) Resuelve el sistema obtenido en el apartado anterior y expresa su solución en forma vectorial.

6) (1,5p) Dada la matriz A , calcula A^n :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) (1,5p) Resuelve la siguiente ecuación matricial y comprueba el resultado:

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4: Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro k y resuélvelo, en su caso, expresando la solución en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x+2ky+z=1 \\ x+3ky+2z=2 \\ x+2ky+kz=k^2 \end{cases}$$

(2 Puntos)

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2k & 1 & 1 \\ 1 & 3k & 2 & 2 \\ 1 & 2k & k & k^2 \end{array}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2k & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & k^2-1 \end{array}\right) \xrightarrow{2} \begin{cases} k=0 \\ k-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $k=0$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:³

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\alpha \\ z=1 \end{cases}$$

2º) Si $k=1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2y-1+y \\ z=1-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\alpha \\ y=\alpha \\ z=1-\alpha \end{cases}$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} x+2ky+z=1 \\ ky+z=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z=k+1} \Rightarrow ky=1-z=1-k-1=-k \Rightarrow \boxed{y=-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow x=1-2ky-z=1+2k-k-1=k \Rightarrow \boxed{x=k}$$

¹ $2af-1af$; $3af-1af$.

² Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

³ Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.

⁴ $3af+2af$.

Ejercicio 5: Si $x=\alpha+\beta+3\gamma$, $y=1-\alpha+\beta+\gamma$ y $z=\alpha+2\beta+5\gamma$: **a)** elimina los parámetros; **b)** resuelve el sistema obtenido en el apartado anterior y expresa su solución en forma vectorial.

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+3\gamma=x \\ -\alpha+\beta+\gamma=y-1 \\ \alpha+2\beta+5\gamma=z \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ -1 & 1 & 1 & y-1 \\ 1 & 2 & 5 & z \end{array} \right) \stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 2 & 4 & x+y-1 \\ 0 & 1 & 2 & -x+z \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & 2 & -x+z \\ 0 & 2 & 4 & x+y-1 \end{array} \right) \stackrel{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & 2 & -x+z \\ 0 & 0 & 0 & 3x+y-2z-1 \end{array} \right) \rightarrow 3x+y-2z=1$$

b) Como el sistema es de una sola ecuación, la solución es inmediata:

$$3x+y-2z=1 \Rightarrow y=1-3x+2z \Rightarrow \begin{cases} x=a \\ y=1-3a+2b \\ z=b \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¹ $2^{\text{af}}+1^{\text{af}}$; $3^{\text{af}}-1^{\text{af}}$.

² $2^{\text{af}} \leftrightarrow 3^{\text{af}}$.

³ $3^{\text{af}}-2 \cdot 2^{\text{af}}$.

Ejercicio 6: Dada la matriz A , calcula A^n :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* * *

(1,5 PUNTOS)

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (1,5 \text{ PUNTOS})$$

Trasponemos los dos miembros de la ecuación matricial:

Aplicamos el método de Gauss:

Comprobación:

También puede hacerse de la siguiente manera. Si $X \cdot A = B$ es la ecuación matricial planteada, se calcula por Gauss la inversa de A y se despeja X :

$$X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

- 5 -