

1) (1p) Si $A=(a_{ij})$ es una matriz de orden $m \times n$, $B=(b_{ij})$ es una matriz de orden $n \times p$ y $A \cdot B=(c_{ij})$, escribe c_{ij} en función de los elementos de las matrices A y B.

2) (2p) Define:

- a)** Sistemas equivalentes.
- b)** Matrices equivalentes.
- c)** Rango de una matriz.
- d)** Matriz inversible.

3) (2p) Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro k y resuélvelo, en su caso, expresando la solución en forma paramétrica:

$$\begin{cases} -y+z=k \\ k^2x+z=2k+1 \\ (k^2-k)x-y+z=2k \end{cases}$$

4) (2p) Si $x=3a-b+2c$, $y=a+3b+4c$ y $z=-a-b-2c$:

- a)** Elimina los parámetros.
- b)** Resuelve el sistema obtenido en el apartado anterior y expresa su solución en forma vectorial.

5) (1,5p) Dada la matriz A, calcula A^n :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6) (1,5p) Resuelve la siguiente ecuación matricial y comprueba el resultado:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3: Discute el siguiente sistema según sea el valor del parámetro k y resuélvelo, en su caso, expresando la solución en forma paramétrica:

$$\begin{cases} -y+z=k \\ k^2x+z=2k+1 \\ (k^2-k)x-y+z=2k \end{cases} \quad (2 \text{ Puntos})$$

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & k \\ k^2 & 0 & 1 & 2k+1 \\ k^2-k & -1 & 1 & 2k \end{array} \right) \xrightarrow{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & k \\ 1 & 0 & k^2 & 2k+1 \\ 1 & -1 & k^2-k & 2k \end{array} \right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k^2 & k+1 \\ 0 & 0 & k^2-k & k \end{array} \right) \xrightarrow{3}$$

$$\rightarrow k^2-k=0 \Rightarrow k(k-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $k=0$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:⁴

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} z-y=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=y \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

2º) Si $k=1$, el sistema es incompatible:⁵

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} z-y=k \\ y+k^2x=k+1 \\ k(k-1)x=k \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{k-1}} \Rightarrow y=k+1-k^2 \cdot \frac{1}{k-1} = \frac{k^2-1-k^2}{k-1} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{k-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=k+\frac{-1}{k-1} \Rightarrow \boxed{z=\frac{k^2-k-1}{k-1}}$$

¹ $1^a c \leftrightarrow 3^a c$.

² $2^a f - 1^a f$; $3^a f - 1^a f$.

³ Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

⁴ Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.

⁵ Ya que la última ecuación es incompatible.

Ejercicio 4: Si $x=3a-b+2c$, $y=a+3b+4c$ y $z=-a-b-2c$: **a)** elimina los parámetros; **b)** resuelve el sistema obtenido en el apartado anterior y expresa su solución en forma vectorial. (2 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{cases} 3a-b+2c=x \\ a+3b+4c=y \\ -a-b-2c=z \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & x \\ 1 & 3 & 4 & y \\ -1 & -1 & -2 & z \end{array} \right) \stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & y \\ 3 & -1 & 2 & x \\ -1 & -1 & -2 & z \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & y \\ 0 & -10 & -10 & x-3y \\ 0 & 2 & 2 & y+z \end{array} \right) \stackrel{3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & y \\ 0 & -10 & -10 & x-3y \\ 0 & 10 & 10 & 5y+5z \end{array} \right) \stackrel{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & y \\ 0 & -10 & -10 & x-3y \\ 0 & 0 & 0 & x+2y+5z \end{array} \right) \rightarrow x+2y+5z=0$$

b) Como el sistema es de una sola ecuación, la solución es inmediata:

$$x+2y+5z=0 \Rightarrow x=-2y-5z \Rightarrow \begin{cases} x=-2\alpha-5\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¹ $1^{\text{af}} \leftrightarrow 2^{\text{af}}$.

² $2^{\text{af}} - 3 \cdot 1^{\text{af}}$; $3^{\text{af}} + 1^{\text{af}}$.

³ $3^{\text{af}} \cdot 5$.

⁴ $3^{\text{af}} + 2^{\text{af}}$.

Ejercicio 5: Dada la matriz A, calcula A^n :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* * *

(1,5 PUNTOS)

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 9 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 12 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 3n & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6: Resuelve la siguiente ecuación matricial y comprueba el resultado:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad (1, 5 \text{ Puntos})$$

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & | & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & | & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & | & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & | & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & | & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & | & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el primer sistema:

$$\begin{cases} -x+y+z=2 \\ y+t=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2+y+z \\ y=3-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2+3-t+z \\ y=3-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+a-b \\ y=3-b \\ z=a \\ t=b \end{cases}$$

Resolvemos el segundo sistema:

$$\begin{cases} -x+y+z=-1 \\ y+t=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+y+z \\ y=-2-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2-t+z \\ y=-2-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+c-d \\ y=-2-d \\ z=c \\ t=d \end{cases}$$

Las soluciones de estos dos sistemas nos proporcionan las dos columnas de la matriz solución:

$$X = \begin{pmatrix} 1+a-b & -1+c-d \\ 3-b & -2-d \\ a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+a-b & -1+c-d \\ 3-b & -2-d \\ a & c \\ b & d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1-a+b+3-b+a & 1-c+d-2-d+c \\ 1+a-b-a+b & -1+c-d-c+d \\ 2+2a-2b+3-b-2a+3b & -2+2c-2d-2-d-2c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

¹ $2af+1af$; $3af+2 \cdot 1af$.

² $3af-3 \cdot 2af$.

³ Suprimimos la última fila por trivial.