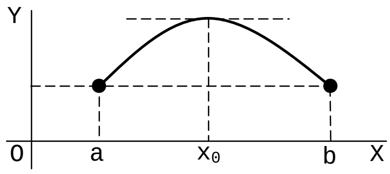
Índice: Teorema de Rolle. Teorema de Lagrange. Problemas.

1.- Teorema de Rolle

Si f es continua en el intervalo cerrado [a,b], derivable en el intervalo abierto (a,b) y f(a)=f(b), entonces existe al menos un x_0 en (a,b) tal que $f'(x_0)=0$.

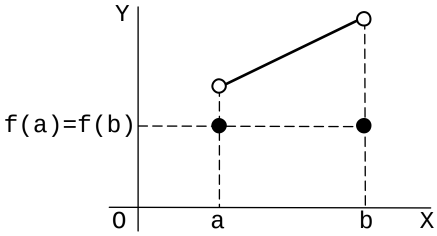
* * *

El teorema asegura la existencia en el intervalo (a,b) de al menos un punto x_0 en el que la tangente es horizontal:



* * *

Es importante recalcar que la función debe ser continua en el intervalo *cerrado* [a,b]. La siguiente función es continua en el intervalo *abierto* (a,b) y su derivada no se anula en ningún punto de dicho intervalo:



* * *

Por ejemplo, vamos a demostrar que la ecuación $x^5+2x-1=0$ tiene sólo una solución real.[1]

Para verlo, utilizaremos el *método de reducción al absurdo.*[2]

Supongamos que dicha ecuación tiene más de una solución. Sean a y b (a<b) dos de esas soluciones. En ese caso, $a^5+2a-1=0$ y $b^5+2b-1=0$.

Ahora bien, la derivada de la función $f(x)=x^5+2x-1$ es $f'(x)=5x^4+2$. Luego f es continua en el cerrado [a,b] por ser derivable en R; es derivable en el abierto (a,b) por serlo en R, y f(a)=f(b)=0. Por tanto, existe c en (a,b) tal que $f'(c)=5c^4+2=0$. Pero $5c^4+2>0$. Como ambas cosas no pueden ser ciertas a la vez, la ecuación $x^5+2x-1=0$ sólo tiene una solución real.

[1] Que la ecuación tiene solución, se puede demostrar por el teorema de Bolzano.
[2] Este método consiste en suponer que es cierto lo contrario de lo que se quiere demostrar, y deducir de ello una contradicción, un absurdo. Lo que nos permite asegurar la verdad de lo que se pretende probar.

2.- Teorema de Lagrange[1]

Si f es una función continua en el intervalo cerrado [a,b] y derivable en el intervalo abierto (a,b), entonces existe al menos un x_0 en (a,b) tal que

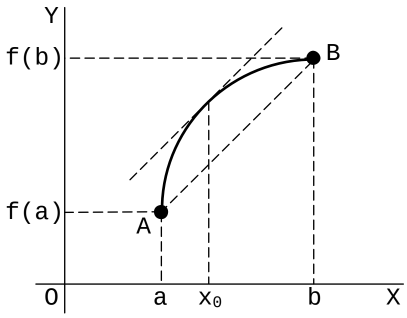
$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

* * *

Si A y B son los puntos de coordenadas (a,f(a)) y (b,f(b)), respectivamente, entonces $[\overrightarrow{AB}]=\big(b-a,f(b)-f(a)\big)$. Por tanto, la pendiente de la recta AB es:

$$m_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Como $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x_0, lo que afirma el teorema es que existe en el intervalo (a,b) por lo menos un punto x_0 en el que la recta tangente es paralela a AB:



* * *

Observa que si la función f cumple las condiciones del teorema de Lagrange, entonces la siguiente función auxiliar cumple las condiciones del teorema de Rolle:

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$$

En efecto, si f es continua en [a,b], evidentemente g también;[2] si f es derivable en (a,b), también g; y, por último, g(a)=g(b), como es fácil comprobar.

Esta función nos permite aplicar el teorema de Rolle en lugar del teorema de Lagrange.

* * *

Por ejemplo, dada la siguiente función, vamos a demostrar que

[1] Este teorema se conoce también con el nombre de *teorema del valor medio del cálculo diferencial o teorema de los incrementos finitos*.
[2] Ya que el sustraendo de dicha resta es derivable en R.

existe $\alpha\in(0,2)$ tal que $f'(\alpha)=-2$:

$$f(x)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-x^2$$

Primero derivamos la función:

- $f'(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)'-2x=\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-2x$
- $\text{Dom}(f')=\mathbb{R}$

Evidentemente:

1º) f es continua en $[0,2]$ por ser derivable en R.

2º) f es derivable en $(0,2)$ por serlo en R.

Como la función f cumple las condiciones del teorema de Lagrange,[1] existe α en $(0,2)$ tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{-4-0}{2}\overset{2}{=}-2$$

* * *

Como hemos indicado más arriba, este problema también puede resolverse mediante el teorema de Rolle utilizando la función auxiliar:

$$g(x)=f(x)+2x=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-x^2+2x$$

3.- Problemas

1) Estudia si se puede aplicar el teorema de Rolle a cada una de las siguientes funciones. En caso afirmativo, calcula los valores que lo verifican; y en caso negativo, indica qué condición de la hipótesis no cumplen:

a) $y=x^2-4x+11$ en $[1,3]$

b) $y=|x^2-5|$ en $[1,3]$

c) $y=\sqrt[3]{x^2}$ en $[-1,1]$

d) $y=|\cos x|$ en $[0,\pi]$

e) $y=|\text{sen}\, x|$ en $[\pi/2,3\pi/2]$

f) $y=\begin{cases}2x+2 & \text{si } -1/2\le x<1\\ 5-(x-2)^2 & \text{si } 1\le x\le 4\end{cases}$

2) Halla el valor de los parámetros para que las siguientes funciones cumplan el teorema de Rolle y averigua dónde se cumple la tesis:

a) $y=x^3-4x+3$ en $[0,b]$

b) $y=\begin{cases}-x^2+px & \text{si } -1\le x<3\\ mx+n & \text{si } 3\le x\le 5\end{cases}$

---

[1] Si el dato hubiese sido $f'(\alpha)=0$, habríamos aplicado el teorema de Rolle.

[2] Aunque este cálculo aparece aquí en último lugar, es el primero que hay que hacer. Si no saliese -2, se intenta obtener ese resultado probando con valores contenidos en el intervalo $(0,2)$. Si a y b ($a<b$) son dichos valores, se sustituye el intervalo $(0,2)$ por el intervalo (a,b). En caso de no encontrar esos valores, se puede aplicar la propiedad de Darboux a la función f' o el teorema de Bolzano a la función f'+2.

3) La función $f(x)=\sqrt[5]{x^2}-1$ se anula en los extremos del intervalo cerrado $[-1,1]$. Al mismo tiempo es $f'(x)\neq 0$ en $(-1,1)$, en aparente contradicción con el teorema de Rolle. Explica por qué no se verifica la tesis del teorema en este caso.

4) Sin calcular la derivada de $f(x)=x(x+1)(x+2)$, halla cuántas raíces reales tiene la ecuación $f'(x)=0$ y determina los intervalos a los que pertenecen.

5) Prueba que la ecuación $x^3-4x-2=0$ no puede tener dos raíces reales distintas en el intervalo $(2,3)$.

6) Demuestra que la función $f(x)=e^x+x$ tiene una única raíz.

7) Prueba que la ecuación $x^3-x^2+x-1=0$ tiene una única solución.

8) Estudia si se puede aplicar el teorema de Lagrange a cada una de las siguientes funciones. En caso afirmativo, calcula los valores que lo verifican; y en caso negativo, indica qué condición de la hipótesis no cumplen:

a) $y=x^3-5x^2+3x-2$ en $[0,4]$

b) $y=2x+\operatorname{sen} x$ en $[0,\pi]$

c) $y=x^3-x^2+2$ en $[1,4]$

d) $y=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x<4 \\ -x^2+10x-19 & \text{si } 4\leq x \end{cases}$ en $[3,5]$

e) $y=\begin{cases} 1/x & \text{si } -2\leq x<-1 \\ (x^2-3)/2 & \text{si } -1\leq x\leq 0 \end{cases}$

f) $y=\ln(x+1)$ en $[1,2]$ y $[-1,1]$

9) Si $f(x)=(x-2)^2\cdot(x+1)$, halla un número c en $[0,4]$ tal que:

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}$$

10) Prueba que la siguiente función satisface las hipótesis del teorema del valor medio y calcula el valor o los valores intermedios vaticinados por el teorema:

$$y=\begin{cases} (x^2-3)/2 & \text{si } -1\leq x\leq 0 \\ 1/x & \text{si } -2\leq x\leq -1 \end{cases}$$

11) Dada la parábola $y=ax^2+bx+c$, prueba que la cuerda que une los puntos de abscisa x_1 y de abscisa x_2 es paralela a la tangente a la parábola en el punto de abscisa $(x_1+x_2)/2$.

12) Calcula el valor de los parámetros para que las siguientes funciones verifiquen el teorema de Lagrange y halla dónde se cumple la tesis:

a) $y=\begin{cases} mx+3 & \text{si } 2\leq x<4 \\ -x^2+10x-p & \text{si } 4\leq x\leq 6 \end{cases}$

b) $y=\begin{cases} x^2+2x+m & \text{si } -3\leq x\leq 0 \\ -x^2+px & \text{si } 0<x\leq 2 \end{cases}$

13) En qué punto de la curva $y=\ln x$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $A(1,0)$ y $B(e,1)$.

14) Si $f(x)=x^x$, prueba que existe $\alpha\in(1,6)$ tal que $f'(\alpha)=3$.