JUNIO DE 2013. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} 2ax+(a^2+a-2)y+2z=2 \\ ax-y+2z=0 \\ -ax+y-z=a \end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2a & a^2+a-2 & 2 & 2 \\ a & -1 & 2 & 0 \\ -a & 1 & -1 & a \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 2 & 0 \\ 2a & a^2+a-2 & 2 & 2 \\ -a & 1 & -1 & a \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{a} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{a^2+a} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & a \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a(a+1)=0 \Rightarrow a=0,\ a=-1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -x-y+2z=0 \\ -z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-2 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1 \end{cases}$$

2º) Si a=0, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3º) Si a≠-1 y a≠0, el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} ax-y+2z=0 \\ a(a+1)y-2z=2 \\ z=a \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=a} \Rightarrow a(a+1)y=2+2z=2+2a=2(a+1) \Rightarrow \boxed{y=\frac{2}{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax=y-2z=\frac{2}{a}-2a=\frac{2-2a^2}{a}= \Rightarrow \boxed{x=\frac{2-2a^2}{a^2}}$$

---

1 1ªf↔2ªf.

2 2ªf-1ªf·2; 3ªf+1ªf.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos luego (caso 3º) que despejar.

4 2ªf·1/2.

5 3ªf+2ªf.

JUNIO DE 2013. PROBLEMA A2.

Dado el punto P(1,1,3) y la recta $r\equiv\begin{cases}2x-y-2z+3=0\\x-y+4=0\end{cases}$, encuentra la ecuación general del plano π que es perpendicular a la recta r y que cumple $d(P,\pi)=3$. (2 PUNTOS)

Calculamos un vector direccional de la recta r:

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\2 & -1 & -2\\1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}=-(2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}) \rightarrow \vec{v}=(2,2,1)$$

Como $\vec{v}$ es un vector característico del plano π, su ecuación es:

$$\pi\equiv 2x+2y+z+D=0$$

Como la distancia del punto P al plano π es 3:

$$d(P,\pi)=3 \Rightarrow \frac{|2+2+3+D|}{\sqrt{4+4+1}}=3 \Rightarrow |7+D|=9 \Rightarrow 7+D=\pm 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}D=+9-7=2\\D=-9-7=-16\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\pi\equiv 2x+2y+z+2=0\\\pi\equiv 2x+2y+z-16=0\end{cases}$$

JUNIO DE 2013. PROBLEMA A3.

Dada la función $f(x)=x\cdot e^{\cos(\pi x/2)}$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,3)$ tal que $f'(\alpha)=2$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2 PUNTOS)

Primero derivamos la función:

$$f'(x)=e^{\cos(\pi x/2)}+x\cdot e^{\cos(\pi x/2)}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]'=$$

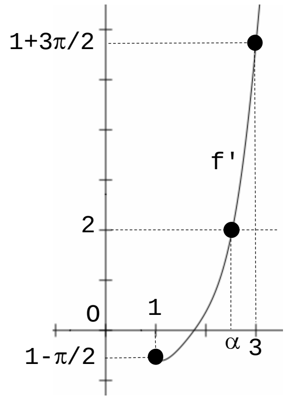
$$=e^{\cos(\pi x/2)}+x\cdot e^{\cos(\pi x/2)}\cdot\left[-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)'=$$

$$=e^{\cos(\pi x/2)}-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot e^{\cos(\pi x/2)}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)=e^{\cos(\pi x/2)}\cdot\left[1-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]$$

* * *

Como la función f' satisface las condiciones de la propiedad de Darboux,[1] existe α en el intervalo abierto (1,3) tal que $f'(\alpha)=2$.

En efecto:



1ª) $f'(1)<2<f'(3)$:

- $f'(1)=e^{\cos(\pi/2)}\cdot\left(1-\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)=e^0\cdot\left(1-\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi}{2}<2.$
- $f'(3)=e^{\cos(3\pi/2)}\cdot\left(1-\frac{3\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)=e^0\cdot\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)=1+\frac{3\pi}{2}>2.$

2ª) f' es continua en [1,3]:

- $[1,3]\subset \mathrm{Dom}(f')=\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$.
- Si $a\in[1,3]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\left(e^{\cos(\pi x/2)}\cdot\left[1-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]\right)=$$

$$=e^{\cos(\pi a/2)}\cdot\left[1-\frac{\pi}{2}\cdot a\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot a\right)\right]=f'(a)$$

[1] Se puede también aplicar el teorema de Bolzano a la función auxiliar $g(x)=f'(x)-2$. Si lo intentas, verás que no puede aplicarse a la función f el teorema de Lagrange.

JUNIO DE 2013. PROBLEMA A4.

Dadas las funciones $f(x)=sen(\pi x)$ y $g(x)=x^3-x$, encuentra los tres puntos en que se cortan y calcula el área de la región del plano encerrada entre sus gráficas. (3 PUNTOS)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo la región cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=sen(\pi x) \\ y=x^3-x \end{cases} \Rightarrow sen(\pi x)=x^3-x \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre -1 y 0 y entre 0 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
-1/2	-1	-1/8+1/2=3/8
1/2	1	1/8-1/2=-3/8

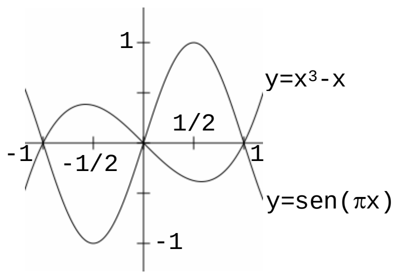
3º) Calculamos el área:[2]

$$A=\int_{-1}^{0}[x^3-x-sen(\pi x)]\cdot dx+\int_{0}^{1}[sen(\pi x)-x^3+x]\cdot dx =$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\cos(\pi x)\right)_{-1}^{0}+\left(-\frac{1}{\pi}\cdot\cos(\pi x)-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)_{0}^{1} =$$

$$=\left(0-0+\frac{1}{\pi}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right)+\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{\pi}-0+0\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}=\frac{4}{\pi}+\frac{1}{2}=\frac{8+\pi}{2\pi}$$



---

1 Esta ecuación se resuelve a ojo.

2 Si se observa la simetría, puede reducirse el cálculo a una de las dos integrales, multiplicando luego por 2 el resultado.

JUNIO DE 2013. PROBLEMA B1.

Encuentra los valores de $t\in R$ que hacen que la matriz A sea no regular:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & t+3 \\ 4 & -t & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

El determinante de A debe ser 0:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & t+3 \\ 4 & -t & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & t+3 \\ 0 & 2-t & -2t-5 \\ 0 & 0 & -t-1 \end{vmatrix} =2\cdot(2-t)\cdot(-t-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-1 \end{cases}$$

[1] $2^a f - 1^a f \cdot 2$; $3^a f - 1^a f$.

JUNIO DE 2013. PROBLEMA B2.

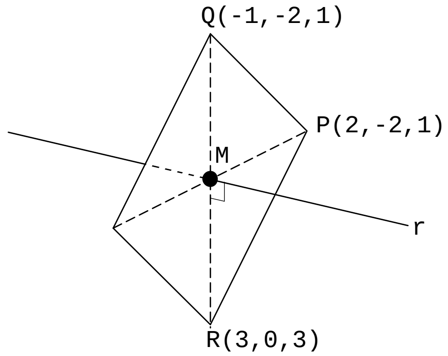
Los puntos P(2,-2,1), Q(-1,-2,1) y R(3,0,3) son tres vértices de un rombo. Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el centro del rombo y es perpendicular al plano que contiene al rombo. (3 PUNTOS)

Averiguamos la posición relativa de los vértices del rombo:

$$d(P,Q)=\sqrt{(-1-2)^2+(-2+2)^2+(1-1)^2}=\sqrt{9+0+0}=3$$

$$d(Q,R)=\sqrt{(3+1)^2+(0+2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{16+4+4}=2\cdot\sqrt{6}$$

$$d(P,R)=\sqrt{(3-2)^2+(0+2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{1+4+4}=3$$



Hallamos las coordenadas del centro del rombo:

$$x=\frac{-1+3}{2}=1;\ y=\frac{-2+0}{2}=-1;\ z=\frac{1+3}{2}=2 \Rightarrow M(1,-1,2)$$

Calculamos un vector característico del plano que contiene al rombo. Como $[\overrightarrow{PQ}]=(-3,0,0)$ y $[\overrightarrow{PR}]=(1,2,2)$:

$$[\overrightarrow{PQ}]\wedge[\overrightarrow{PR}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=6\vec{j}-6\vec{k}=6(\vec{j}-\vec{k})$$

Por tanto, un vector direccional de la recta r es $\vec{v}=(0,1,-1)$.

Por último, escribimos la ecuación continua de la recta r:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$$

JUNIO DE 2013. PROBLEMA B3.

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2+2n}\right)^{2n} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)\right]$$

(2 PUNTOS)

PRIMER LÍMITE:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2+2n}\right)^{2n} \stackrel{1}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2\cdot[1-3/n^2]}{n^2\cdot[1+2/n]}\right)^{2n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-3/n^2}{1+2/n}\right)^{2n} = 1^{+\infty}$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2+2n}\right)^{2n} \stackrel{2}{=} e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2n\cdot\left(\frac{n^2-3}{n^2+2n}-1\right)\right]} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2n\cdot\left(\frac{n^2-3-n^2-2n}{n^2+2n}\right)\right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-6-4n}{n+2}} \stackrel{1}{=} e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n\cdot(-6/n-4)}{n\cdot(1+2/n)}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-6/n-4}{1+2/n}} = e^{-4}$$

SEGUNDO LÍMITE:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)\right] \stackrel{3}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{4}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)\cdot(-2)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\left[2\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)\right] = 2\cdot\mathrm{sen}\frac{\pi}{2} = 2$$

---

1 Sacamos factor común la máxima potencia de n en el numerador y en el denominador.

2 Ya que se trata de la expresión indeterminada $1^{+\infty}$.

3 Transformamos la indeterminación $\infty\cdot 0$ en la indeterminación $0/0$.

4 Aplicamos L'Hôpital.

JUNIO DE 2013. PROBLEMA B4.

Dada la función $f(x)=x\cdot e^{\cos(\pi x/2)}$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,3)$ tal que $f''(\alpha)=\pi$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (3 PUNTOS)

Primero derivamos la función:

$$f'(x)=e^{\cos(\pi x/2)}+x\cdot e^{\cos(\pi x/2)}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]'=$$

$$=e^{\cos(\pi x/2)}+x\cdot e^{\cos(\pi x/2)}\cdot\left[-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)'=$$

$$=e^{\cos(\pi x/2)}-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot e^{\cos(\pi x/2)}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)=e^{\cos(\pi x/2)}\cdot\left[1-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]$$

Calculamos la derivada segunda:[1]

$$f''(x)=e^{\cos(\pi x/2)}\cdot\left[-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left[1-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]+$$

$$+e^{\cos(\pi x/2)}\cdot\left[-\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\frac{\pi}{2}\right]=$$

$$=e^{\cos(\pi x/2)}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left[-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)+\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-x\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot e^{\cos(\pi x/2)}\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]$$

* * *

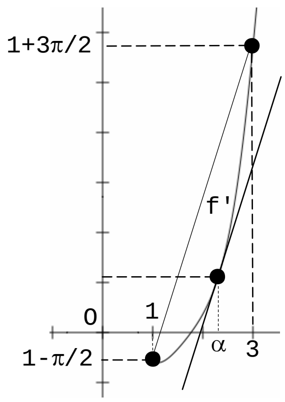
Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Lagrange,[2] existe α en el intervalo abierto (1,3) tal que:[3]

$$f''(\alpha)=\frac{f'(3)-f'(1)}{3-1}=\frac{e^0\cdot(1+3\pi/2)-e^0\cdot(1-\pi/2)}{2}=\frac{1+3\pi/2-1+\pi/2}{2}=\pi$$

En efecto:

1ª) f' es continua en el cerrado [1,3] por ser derivable en R.

2ª) f' es derivable en el abierto (1,3) por serlo en R.



---

[1] Puede evitarse este cálculo afirmando simplemente que la función f' es derivable en R por ser el producto de dos funciones derivables en R.

[2] También podría hacerse el problema probando que la función f" cumple las condiciones de la propiedad de Darboux o que la función $g(x)=f''(x)-\pi$ cumple las del teorema de Bolzano o que la función $g(x)=f'(x)-\pi x$ cumple las del teorema de Rolle.

[3] Observa que se está aplicando el teorema a la función f', y que su derivada es f".