## EXTRAORDINARIO DE 2014. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases}(a+1)x+ay=3\\(a+1)x+(a+1)y+(a+2)z=1\\(a^2+a)x+(a^2-1)y+(a^2-2a-8)z=2a+5\end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a+1 & a & 0 & 3\\a+1 & a+1 & a+2 & 1\\a^2+a & a^2-1 & a^2-2a-8 & 2a+5\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}a+1 & a & 0 & 3\\0 & 1 & a+2 & -2\\0 & -1 & a^2-2a-8 & -a+5\end{array}\right)\overset{2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{a+1} & a & 0 & 3\\0 & \mathbf{1} & a+2 & -2\\0 & 0 & \mathbf{a^2-a-6} & -a+3\end{array}\right)\overset{3}{\rightarrow}\begin{cases}a+1=0 \Rightarrow a=-1\\a^2-a-6=0 \overset{4}{\Rightarrow} (a+2)(a-3)=0 \Rightarrow a=-2,\ a=3\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

**1º)** Si a=-2, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -2 & 0 & 3\\0 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 0 & 5\end{array}\right)$$

**2º)** Si a=-1, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 0 & 3\\0 & 1 & 1 & -2\\0 & 0 & -4 & 4\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 0 & 3\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 0 & 3\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)$$

**3º)** Si a=3, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 3 & 0 & 3\\0 & 1 & 5 & -2\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}4x+3y=3\\y+5z=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x=3-3y\\5z=-2-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3/4-3\alpha/4\\y=\alpha\\z=-2/5-\alpha/5\end{cases}$$

**4º)** En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r}(a+1)x+ay=3\\y+(a+2)z=-2\\(a^2-a-6)z=-a+3\end{array}\right\}\Rightarrow z=\frac{-a+3}{a^2-a-6}=\frac{-(a-3)}{(a+2)(a-3)}\Rightarrow\boxed{z=\frac{-1}{a+2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-2-(a+2)z=-2-(a+2)\cdot\frac{-1}{a+2}=-2+1\Rightarrow\boxed{y=-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+1)x=3-ay=3+a\Rightarrow\boxed{x=\frac{a+3}{a+1}}$$

---

1 2ªf-1ªf; 3ªf-a·1ªf.

2 3ªf+2ªf.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 4º).

4 Descomponemos en factores el primer miembro de la ecuación.

5 2ªf+1ªf; 3ªf·1/4.

## EXTRAORDINARIO DE 2014. PROBLEMA A2.

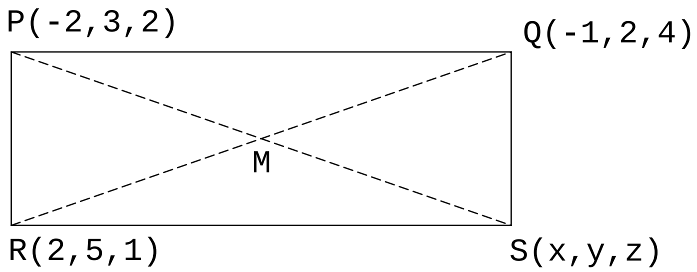
Los puntos P(-2,3,2), Q(-1,2,4) y R(2,5,1) son vértices de un rectángulo. Encuentra el cuarto vértice. (2 PUNTOS)

Averiguamos la posición relativa de los vértices del rectángulo:

$$[\overrightarrow{QP}]\cdot[\overrightarrow{QR}]=(-1,1,-2)\cdot(3,3,-3)=-3+3+6=6\neq 0$$

$$[\overrightarrow{PQ}]\cdot[\overrightarrow{PR}]=(1,-1,2)\cdot(4,2,-1)=4-2-2=0$$

Por tanto:




A continuación puede seguirse uno de los siguientes métodos:

### PRIMER MÉTODO:

$$[\overrightarrow{RS}]=[\overrightarrow{PQ}] \Rightarrow (x-2,y-5,z-1)=(1,-1,2) \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ y-5=-1 \\ z-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases}$$

### SEGUNDO MÉTODO:

$$[\overrightarrow{PS}]=[\overrightarrow{PQ}]+[\overrightarrow{PR}]= \Rightarrow (x+2,y-3,z-2)=(1,-1,2)+(4,2,-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2,y-3,z-2)=(5,1,1) \Rightarrow \begin{cases} x+2=5 \\ y-3=1 \\ z-2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases}$$

### TERCER MÉTODO:

Si M es el centro del rectángulo, como es el punto medio del segmento QR, sus coordenadas son: M(1/2,7/2,5/2).

Como M es también el punto medio del segmento PS, se tiene:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2}=1/2 \\ \dfrac{y+3}{2}=7/2 \\ \dfrac{z+2}{2}=5/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ y+3=7 \\ z+2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases}$$

## EXTRAORDINARIO DE 2014. PROBLEMA A3.

Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones y simplifica la expresión resultante:

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \qquad g(x)=\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{2x}$$

(2 PUNTOS)

**a)**

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \overset{1}{=} \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1-x}{1+x} \overset{1}{=} \frac{1}{2}\cdot[\ln(1-x)-\ln(1+x)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{1-x^2}=\frac{-1}{1-x^2}=\frac{1}{x^2-1}$$

* * *

También puede calcularse directamente:

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)'}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}=\frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}=\frac{\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}}{2\cdot\frac{1-x}{1+x}}=\frac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{\frac{2(1-x)}{1+x}}=$$

$$=\frac{-2}{(1+x)^2}\cdot\frac{1+x}{2(1-x)}=\frac{-1}{1-x^2}=\frac{1}{x^2-1}$$

**b)** Aplicamos el método de derivación logarítmica:

$$g(x)=\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{2x} \overset{1}{\Rightarrow} \ln g(x)=2x\cdot\ln\frac{\cos x}{x} \overset{1}{\Rightarrow} \ln g(x)=2x\cdot(\ln\cos x-\ln x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)}=2\cdot(\ln\cos x-\ln x)+2x\cdot\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}-\frac{1}{x}\right) \overset{1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)}=2\cdot\ln\frac{\cos x}{x}-2x\cdot\operatorname{tg} x-2 \Rightarrow g'(x)=-2\cdot\left(1+x\cdot\operatorname{tg} x-\ln\frac{\cos x}{x}\right)\cdot\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{2x}$$

* * *

También puede calcularse directamente:

$$g(x)=\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{2x}=e^{2x\cdot\ln\frac{\cos x}{x}} \overset{1}{=} e^{2x\cdot(\ln\cos x-\ln x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=e^{2x\cdot(\ln\cos x-\ln x)}\cdot[2x\cdot(\ln\cos x-\ln x)]' \overset{1}{=}$$

$$=\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{2x}\cdot\left[2\cdot\ln\frac{\cos x}{x}+2x\cdot\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}-\frac{1}{x}\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{2x}\cdot\left(2\cdot\ln\frac{\cos x}{x}-2x\cdot\operatorname{tg} x-2\right)=-2\cdot\left(1+x\cdot\operatorname{tg} x-\ln\frac{\cos x}{x}\right)\cdot\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{2x}$$

1 Por las propiedades de los logaritmos.

## EXTRAORDINARIO DE 2014. PROBLEMA A4.

Dada la función $f(x)=(x-2)\cdot e^{\sqrt{x^2-4x+5}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,3)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (3 PUNTOS)

El dominio de la función f es R:

$$x^2-4x+5=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}$$

Derivamos la función f:

$$f'(x)=e^{\sqrt{x^2-4x+5}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\cdot x\right)+$$

$$+(x-2)\cdot e^{\sqrt{x^2-4x+5}}\cdot\frac{2x-4}{2\cdot\sqrt{x^2-4x+5}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-(x-2)\cdot e^{\sqrt{x^2-4x+5}}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\frac{\pi}{2}$$

Por tanto, Dom(f')=Dom(f)=R.

* * *

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [1,3], existe $\alpha$ en (1,3) tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

**1ª)** f(1)=f(3):

- $f(1)=-e^{\sqrt{2}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right)=-e^{\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{5}\cdot 0-\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\cdot 1\right)=e^{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$
- $f(3)=e^{\sqrt{2}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{2}\right)=e^{\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{5}\cdot 0-\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\cdot(-1)\right)=e^{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$

**2ª)** f es continua en [1,3] por ser derivable en R.

**3ª)** f es derivable en (1,3) por serlo en R.

## Extraordinario de 2014. Problema B1.

Sabiendo que el determinante de la matriz A vale 1, halla el valor del determinante de la matriz B:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2g & a & a-d \\ 2h & b & b-e \\ 2k & c & c-f \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

$$|B|=\begin{vmatrix} 2g & a & a-d \\ 2h & b & b-e \\ 2k & c & c-f \end{vmatrix} \overset{1}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} g & a & a-d \\ h & b & b-e \\ k & c & c-f \end{vmatrix} \overset{2}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} g & a & -d \\ h & b & -e \\ k & c & -f \end{vmatrix} \overset{3}{=} -2\cdot\begin{vmatrix} g & a & d \\ h & b & e \\ k & c & f \end{vmatrix}=$$

$$\overset{4}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & k & f \end{vmatrix} \overset{5}{=} -2\cdot\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix} \overset{6}{=} -2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -2\cdot|A|=-2\cdot 1=-2$$

---

1 1ªc·1/2.
2 3ªc-2ªc.
3 3ªc·(-1).
4 1ªc↔2ªc.
5 2ªc↔3ªc.
6 El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

## EXTRAORDINARIO DE 2014. PROBLEMA B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta r que corta perpendicularmente a las rectas:

$$s \equiv \begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases} \qquad t \equiv \frac{x}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{1}$$

(3 PUNTOS)

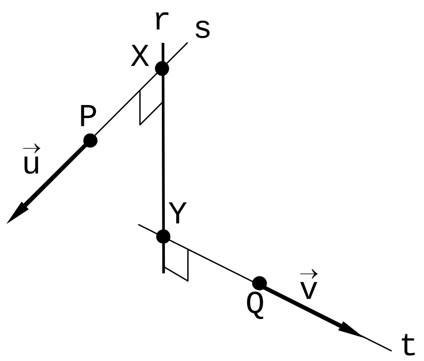
### PRIMER MÉTODO:

Calculamos primero las ecuaciones paramétricas y las determinaciones lineales de las rectas:

- $s \equiv \begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=-1 \end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 3x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3-2x+y \\ y=2-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3-2x+2-3x \\ y=2-3x \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=5-5x \\ y=2-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=2-3\alpha \\ z=5-5\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(0,2,5) \\ \vec{u}(1,-3,-5) \end{cases}$$

- $t \equiv \frac{x}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{1}=\beta \Rightarrow \begin{cases} x=3\beta \\ y=-3-\beta \\ z=1+\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q(0,-3,1) \\ \vec{v}(3,-1,1) \end{cases}$




Por estar el punto X en la recta s: $X(\alpha,2-3\alpha,5-5\alpha)$.

Por estar el punto Y en t: $Y(3\beta,-3-\beta,1+\beta)$.

Por tanto: $[\overrightarrow{XY}]=(-\alpha+3\beta,-5+3\alpha-\beta,-4+5\alpha+\beta)$.

Como $[\overrightarrow{XY}]$ es perpendicular a $\vec{u}(1,-3,-5)$ y a $\vec{v}(3,-1,1)$:

$$\begin{cases} [\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{u}=0 \\ [\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{v}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha+3\beta+15-9\alpha+3\beta+20-25\alpha-5\beta=0 \\ -3\alpha+9\beta+5-3\alpha+\beta-4+5\alpha+\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -35\alpha+\beta=-35 \\ -\alpha+11\beta=-1 \end{cases} \overset{2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -384\beta=0 \\ -\alpha+11\beta=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=1 \end{cases} \overset{3}{\Rightarrow} \begin{cases} X(1,-1,0) \\ Y(0,-3,1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{XY}]=(-1,-2,1) \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$$

---

[1] A la segunda ecuación le sumo la primera.

[2] A la primera ecuación le resto 35 veces la segunda.

[3] Si los puntos X e Y coinciden, eso significa que las rectas s y t se cortan en dicho punto. En ese caso, la recta buscada pasa por ese punto y tiene por vector direccional el producto vectorial de los vectores direccionales de las rectas s y t. Si el sistema es compatible indeterminado, se trata de dos rectas paralelas (los vectores direccionales de r y s te habrán salido colineales), y entonces hay infinitas soluciones.

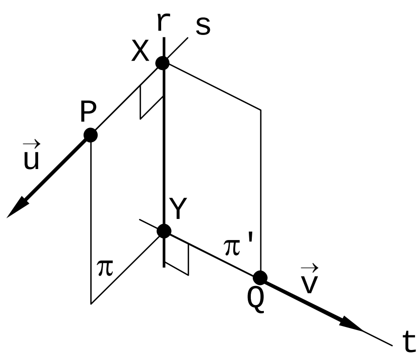
### SEGUNDO MÉTODO:

Igual que antes, calculamos primero las ecuaciones paramétricas y las determinaciones lineales de las rectas:

- $$s \equiv \begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=-1 \end{cases} \overset{[1]}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 3x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3-2x+y \\ y=2-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3-2x+2-3x \\ y=2-3x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=5-5x \\ y=2-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=2-3\alpha \\ z=5-5\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(0,2,5) \\ \vec{u}(1,-3,-5) \end{cases}$$

- $$t \equiv \frac{x}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{1}=\beta \Rightarrow \begin{cases} x=3\beta \\ y=-3-\beta \\ z=1+\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q(0,-3,1) \\ \vec{v}(3,-1,1) \end{cases}$$




Como los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares a la recta r, un vector direccional de ésta es $\vec{w}=-(\vec{u}\wedge\vec{v})/8=(1,2,-1)$:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\vec{i}-16\vec{j}+8\vec{k}$$

Por tanto, la ecuación del plano $\pi$ (determinado por P, $\vec{u}$ y $\vec{w}$) es:

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-5 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 13x-4(y-2)+5(z-5)=0 \Rightarrow 13x-4y+8+5z-25=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13x-4y+5z=17$$

Como el punto Y está en la recta t:[2] $Y(3\beta,-3-\beta,1+\beta)$.

Como el punto Y está en el plano $\pi$, satisface su ecuación:

$$39\beta-4(-3-\beta)+5(1+\beta)=17 \Rightarrow 39\beta+12+4\beta+5+5\beta=17 \Rightarrow 48\beta=0 \Rightarrow \beta=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(0,-3,1)$$

Por tanto:

$$r \equiv \frac{x}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

---

[1] A la segunda ecuación le sumo la primera.

[2] En lugar de lo que sigue, se podría calcular la ecuación del plano $\pi'$. La recta r sería entonces la intersección de los planos $\pi$ y $\pi'$.

## EXTRAORDINARIO DE 2014. PROBLEMA B3.

Dada la función $f(x)=e^{1+2x-x^2}$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=-e$. Menciona el resultado teórico aplicado y justifica su uso. (2 PUNTOS)

Derivamos la función:

$$f'(x)=e^{1+2x-x^2}\cdot(2-2x)$$

* * *

Como la función f' satisface las condiciones de la propiedad de Darboux[1] en el intervalo cerrado [1,2], existe $\alpha$ en (1,2) tal que $f'(\alpha)=-e$.

En efecto:

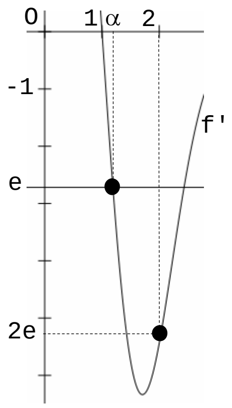
**1ª)** $f'(2)<-e<f'(1)$:

- $f'(1)=e^2\cdot 0=0$.
- $f'(2)=e\cdot(-2)=-2e$.

**2ª)** f' es continua en [1,2]:[2]

- $[1,2]\subset \mathrm{Dom}(f')=\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$.
- Si $a\in[1,2]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}[e^{1+2x-x^2}\cdot(2-2x)]=e^{1+2a-a^2}\cdot(2-2a)=f'(a)$$




1 Se puede también aplicar el teorema de Bolzano a la función auxiliar $g(x)=f'(x)+e$. Si lo intentas, verás que no puede aplicarse a la función f el teorema de Lagrange.

2 También se puede demostrar la continuidad de f' derivándola.

## Extraordinario de 2014. Problema B4.

Dada la función $f(x)=3+2x^2-x^4$, halla los puntos de corte con el eje de abscisas y calcula el área de la región del plano encerrada entre esa curva y el eje de abscisas. (3 Puntos)

**1º)** Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo la región cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=3+2x^2-x^4 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x^4-2x^2-3=0 \Rightarrow x^2=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \\ x^2=-1 \end{cases}$$

**2º)** Averiguamos entre $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$ qué función está por encima y qué función está por debajo:

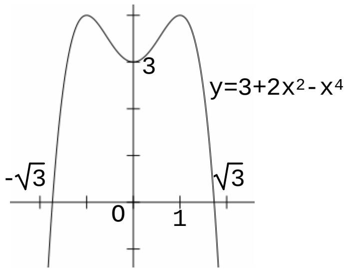
| x | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 3 | 0 |

**3º)** Calculamos el área:[1]

$$A=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}[3+2x^2-x^4]\cdot dx \overset{2}{=} \left(3x+2\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=$$

$$=\left(3\sqrt{3}+\frac{2}{3}\cdot3\sqrt{3}-\frac{1}{5}\cdot9\sqrt{3}\right)-\left(-3\sqrt{3}-\frac{2}{3}\cdot3\sqrt{3}+\frac{1}{5}\cdot9\sqrt{3}\right)=$$

$$=2\cdot\left(5\sqrt{3}-\frac{9}{5}\cdot\sqrt{3}\right)=2\cdot\frac{16\sqrt{3}}{5}=\frac{32\sqrt{3}}{5}$$




[1] Si se repara en que la función f es par, pueden tomarse los números 0 y $\sqrt{3}$ como los límites inferior y superior, respectivamente, de la siguiente integral. Luego se multiplica el resultado por 2.

[2] Las tres integrales son inmediatas.