Índice: Cálculo de integrales definidas. Integrales impropias. Problemas.

1.- Cálculo de integrales definidas

El procedimiento que seguiremos para calcular una integral definida consiste en hallar primero (y aparte[1]) la correspondiente integral indefinida y a continuación aplicar la regla de Barrow.

Por ejemplo:

$$\int_0^{\pi/4} \sec x \cdot dx$$

Primero calculamos la integral indefinida:

$$\int \sec x \cdot dx \overset{2}{=} \int \frac{\sec x \cdot (\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} \cdot dx = \int \frac{\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \sec^2 x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \cdot dx \overset{3}{=}$$

$$= \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

Por tanto:

$$\int_0^{\pi/4} \sec x \cdot dx = [\ln|\sec x + \operatorname{tg} x|]_0^{\pi/4} = \ln|\sec(\pi/4) + \operatorname{tg}(\pi/4)| - \ln|\sec 0 + \operatorname{tg} 0| =$$

$$= \ln(\sqrt{2}+1) - \ln 1 = \ln(\sqrt{2}+1)$$

Otro ejemplo:

$$\int_1^{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sec} x \cdot dx$$

Calculamos la integral indefinida:

$$\int \operatorname{arc\,sec} x \cdot dx \overset{4}{=} \int t \cdot \sec t \cdot \operatorname{tg} t \cdot dt \overset{5}{=} t \cdot \sec t - \int \sec t \cdot dt =$$

$$= t \cdot \sec t - \ln|\sec t + \operatorname{tg} t| + C \overset{6}{=} x \cdot \operatorname{arc\,sec} x - \ln|x \pm \sqrt{x^2-1}| + C$$

S	D	I
+	t	$\sec t \cdot \operatorname{tg} t$
-	1	$\sec t$

[1] Salvo que su cálculo sea trivial, en cuyo caso lo haremos directamente.
[2] Multiplicamos y dividimos por $\sec x + \operatorname{tg} x$. Como esta es la forma más sencilla de calcular esta integral, conviene que la memorices. De modo similar se calcula la integral indefinida de la función cosecante.
[3] Se trata de una integral casi inmediata de tipo logaritmo.
[4] Hacemos el cambio $\operatorname{arc\,sec} x = t \Rightarrow x = \sec t \Rightarrow dx = \sec t \cdot \operatorname{tg} t \cdot dt$. Del mismo modo se calcula la integral indefinida de la función arco cosecante.
[5] Esta integral la hacemos por partes. Nos paramos en la segunda fila porque sabemos calcular, lo acabamos de hacer, la integral de la secante.
[6] Deshacemos el cambio: $\operatorname{arc\,sec} x = t \Rightarrow x = \sec t \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 t = x^2 \Rightarrow \operatorname{tg} t = \pm\sqrt{x^2-1}$. Recuerda que la función arco secante tiene por dominio $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ y es la recíproca de la función secante restringida al conjunto $[0,\pi/2) \cup (\pi/2,\pi]$. Si observas sus gráficas, verás que si $x \geq 1 \Rightarrow 0 \leq t < \pi/2 \Rightarrow \operatorname{tg} t \geq 0$; y que si $x \leq -1 \Rightarrow \pi/2 < t \leq \pi \Rightarrow \operatorname{tg} t \leq 0$.

Por tanto:

$$\int_1^{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sec} x \cdot dx \overset{1}{=} \left[x \cdot \operatorname{arc\,sec} x - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right]_1^{\sqrt{2}} =$$

$$=\left(\sqrt{2} \cdot \operatorname{arc\,sec} \sqrt{2} - \ln\left|\sqrt{2}+1\right|\right) - \left(\operatorname{arc\,sec} 1 - \ln 1\right) = \sqrt{2} \cdot \pi/4 - \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

2.- Integrales impropias

Si f es continua en el intervalo semiabierto [a,b), se define la integral desde a hasta b de la función f de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \overset{2}{=} \lim_{\substack{c \to b \\ c<b}} \int_a^c f(x) \cdot dx$$

Parecidas definiciones se hacen cuando se trata de los intervalos semiabiertos (a,b], [a,+∞) y (-∞,b].

Como las integrales impropias son límites, pueden ser convergentes, divergentes u oscilantes, según que el límite correspondiente sea finito, infinito o no exista.

Por ejemplo:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx \overset{3}{=} \lim_{\substack{a \to 0 \\ a>0}} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx \overset{4}{=} \lim_{\substack{a \to 0 \\ a>0}} \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = \lim_{\substack{a \to 0 \\ a>0}} \left[2-2\sqrt{a}\right] = 2$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx \overset{5}{=} 2 \cdot \int \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot dx = 2\sqrt{x} + C$$

Por ejemplo:

$$\int_{-\infty}^0 e^x \cdot dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 e^x \cdot dx \overset{6}{=} \lim_{a \to -\infty} \left[e^x\right]_a^0 = \lim_{a \to -\infty} \left[1-e^a\right] = 1-e^{-\infty} = 1-0 = 1$$

Por ejemplo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} \cdot dx \overset{7}{=} \lim_{b \to +\infty} \left[\ln|x|\right]_1^b = \lim_{b \to +\infty} \ln b = +\infty$$

Se trata, pues, de una integral divergente.

[1] Ya que $x \geq 1$.
[2] Observa que la integral definida desde a hasta c de la función f no plantea problemas con la teoría que hemos visto, ya que f es continua en el intervalo cerrado [a,c].
[3] Ya que la función no está definida en x=0.
[4] La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.
[5] Se trata de una integral inmediata de tipo potencial. Aunque podría hacerse, como todas las de este tipo, escribiendo la función integrando como $x^{-1/2}$, también puede procederse como lo hemos hecho al tratarse de una fracción cuyo denominador es una raíz cuadrada y cuyo numerador es la derivada del radicando de dicha raíz.
[6] La correspondiente integral indefinida es inmediata de tipo exponencial.
[7] La correspondiente integral indefinida es inmediata de tipo logaritmo.

Por ejemplo:

$$\int_0^{+\infty}\cos x\cdot dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\cos x\cdot dx \overset{1}{=} \lim_{b\to+\infty}[\operatorname{sen} x]_0^b=\lim_{b\to+\infty}[\operatorname{sen} b-\operatorname{sen} 0]=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{sen} b$$

Se trata de una integral oscilante.

Por ejemplo:

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot dx \overset{2}{=} \lim_{\substack{b\to1\\b<1}}\int_0^b\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot dx \overset{3}{=} \lim_{\substack{b\to1\\b<1}}[\operatorname{arc\,sen} x-\sqrt{1-x^2}]_0^b=$$

$$=\lim_{\substack{b\to1\\b<1}}[(\operatorname{arc\,sen} b-\sqrt{1-b^2})-(\operatorname{arc\,sen} 0-\sqrt{1-0^2})]=$$

$$=\lim_{\substack{b\to1\\b<1}}[\operatorname{arc\,sen} b-\sqrt{1-b^2}+1]=\operatorname{arc\,sen} 1-0+1=\frac{\pi}{2}+1$$

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot dx \overset{4}{=} \int\sqrt{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}}\cdot dx \overset{5}{=} \int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot dx \overset{6}{=}$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx-\int\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{1-x^2}}\cdot dx \overset{7}{=} \operatorname{arc\,sen} x-\sqrt{1-x^2}+C$$

3.- Problemas

1) Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^e\frac{x+\ln x}{x}\cdot dx$	**b)** $\int_0^3(3-x)^9\cdot dx$	**c)** $\int_{-1}^0\sqrt[5]{x+1}\cdot dx$
d) $\int_1^2\frac{x^4+x-2}{x^3}\cdot dx$	**e)** $\int_1^2(x+1/x)^2\cdot dx$	**f)** $\int_{-2}^0\frac{x^2}{\sqrt{e^x}}\cdot dx$
g) $\int_0^1\frac{dx}{e^x(e^x+1)}$	**h)** $\int_{-2}^{-1}(x-1)^{-3}\cdot dx$	**i)** $\int_0^1 x\cdot\sqrt{x^2+1}\cdot dx$
j) $\int_0^a(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2\cdot dx$	**k)** $\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\cdot dx$	**l)** $\int_1^3 e^{x-1}\cdot dx$
m) $\int_0^1 x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}}\cdot dx$	**n)** $\int_0^2 x^2\cdot(1+x^3)^{1/2}\cdot dx$	**ñ)** $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx$
o) $\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2+\cos x}\cdot dx$	**p)** $\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2(3x)\cdot dx$	**q)** $\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} x}{4-\cos^2 x}\cdot dx$

---

[1] La correspondiente integral indefinida es inmediata de tipo seno.
[2] Ya que la función no está definida en x=1.
[3] La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.
[4] Multiplicamos numerador y denominador por 1+x. El dominio de la función integrando ha pasado de ser [-1,1) a ser (-1,1).
[5] Como 1+x>0, |1+x|=1+x.
[6] Por la propiedad de linealidad de la integral indefinida.
[7] La primera integral es inmediata de tipo arco seno y la segunda, casi inmediata de tipo potencial.

2) Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 2^x \cdot e^x \cdot dx$ **b)** $\int_{-\pi}^{\pi} sen^2 x \cdot \cos x \cdot dx$ **c)** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

d) $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} sec^2 \frac{x}{2} \cdot dx$ **e)** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} ctg\, x \cdot dx$ **f)** $\int_0^1 x^6 \cdot e^x \cdot dx$

g) $\int_0^{\pi} x^4 \cdot \cos x \cdot dx$ **h)** $\int_0^{\pi} e^x \cdot sen\, x \cdot dx$ **i)** $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x+1} \cdot dx$

j) $\int_3^4 \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx$ **k)** $\int_4^6 \frac{x}{x^2-8x+20} \cdot dx$ **l)** $\int_2^5 \frac{dx}{x^2-4x+13}$

m) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+sen\, x}$ **n)** $\int_{-\pi}^{\pi} sen\, x \cdot \cos(3x) \cdot dx$ **ñ)** $\int_3^8 \frac{(x+2) \cdot dx}{x \cdot \sqrt{x+1}}$

3) Calcula:

a) $\int_0^2 f(x) \cdot dx$ si $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ **b)** $\int_0^2 |x-x^2| \cdot dx$

4) Encuentra el error que existe en el siguiente cálculo:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left[\frac{1}{1-x}\right]_0^2 = -2$$

5) Calcula las siguientes integrales impropias:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cdot dx$ **b)** $\int_0^{+\infty} \frac{arc\, tg\, x}{x^2+1} \cdot dx$ **c)** $\int_0^1 x \cdot \ln x \cdot dx$

d) $\int_{-\infty}^1 x \cdot e^x \cdot dx$ **e)** $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$ **f)** $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} \cdot dx$

g) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \cdot dx$ **h)** $\int_0^{1/2} \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} \cdot dx$ **i)** $\int_0^1 \ln x \cdot dx$

j) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$ **k)** $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x-1}} \cdot dx$ **l)** $\int_0^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \cdot dx$

m) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x} \cdot dx$ **n)** $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x}$ **ñ)** $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$

6) Calcula las siguientes integrales impropias:[1]

a) $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} \cdot dx$ **b)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{arc\, ctg\, x}{x^2+1} \cdot dx$ **c)** $\int_{-1}^1 x^2 \cdot \ln x^2 \cdot dx$

[1] Es necesario descomponerlas en suma de dos integrales impropias. Si uno de los sumandos no es convergente, tampoco la suma lo es.