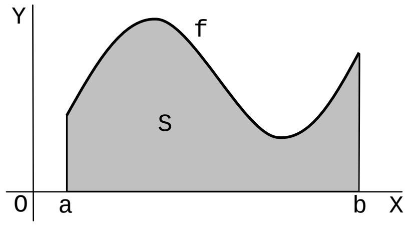
Índice: El problema del área. Ejemplos. Problemas.

1.- El problema del área

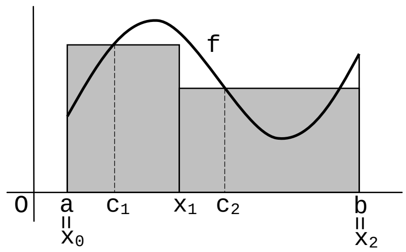
Sea f una función continua y no negativa[1] en [a,b]. Queremos calcular el área S de la región del plano limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas x=a y x=b:



Para ello procederemos por aproximaciones sucesivas, de modo que cada una de ellas constituya un término de una sucesión G_n cuyo límite sea S.

El primer término de la sucesión queda determinado con la elección de una partición[2] del intervalo [a,b], por ejemplo $P_1=\{x_0,x_1,x_2\}$, y de dos puntos, c_1 y c_2, tales que $c_1\in[x_0,x_1]$ y $c_2\in[x_1,x_2]$.[3] Entonces G_1 es la suma de las áreas de los dos rectángulos de bases Δx_1 y Δx_2 y alturas respectivas $f(c_1)$ y $f(c_2)$:[4]

$$G_1=f(c_1)\cdot\Delta x_1+f(c_2)\cdot\Delta x_2$$



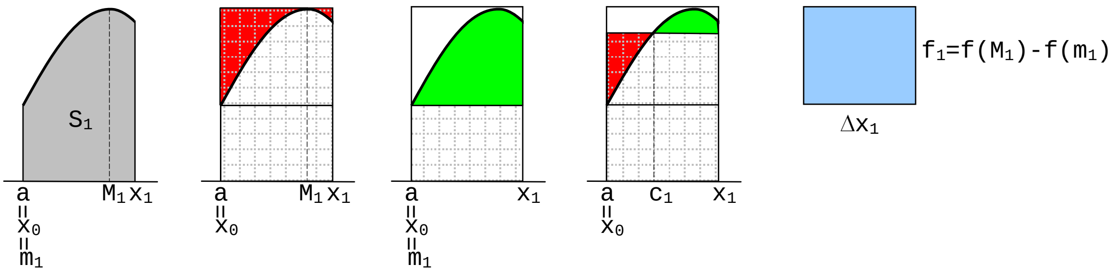
Al ser G_1 una aproximación de S, vamos a ver si podemos acotar el error cometido, e_1.

Como f es una función continua en el intervalo cerrado [a,b], también lo es en $[x_0,x_1]$. Por el teorema de Weierstrass existen m_1 y M_1 en $[x_0,x_1]$ tales que $f(m_1)\le f(x)\le f(M_1)$, $\forall x\in[x_0,x_1]$.

[1] Esto es, tal que $f(x)\ge 0$, $\forall x\in[a,b]$.
[2] Una *partición* del intervalo [a,b] es un conjunto finito de puntos $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$ tal que $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$. Si $\Delta x_1=x_1-x_0$, $\Delta x_2=x_2-x_1,\dots$ y $\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$, se llama *diámetro* de la partición P, y se denota por $|P|$, al mayor de los Δx_i.
[3] La partición P_1 (tanto el número de sus puntos como cuáles sean éstos) y los puntos c_i son de libre elección, lo que quiere decir que hay infinitas maneras de determinar G_1, y lo mismo va a pasar con los demás términos de la sucesión. Resulta, pues, que en realidad hay infinitas sucesiones como la que estamos construyendo.
[4] El diámetro de la partición P_1 es, como se observa en el dibujo, $|P_1|=\Delta x_2$.

Si designamos por S_1 al área bajo la curva en el intervalo $[x_0,x_1]$, es evidente que el área del rectángulo de base Δx_1 y altura $f(M_1)$ es una aproximación por exceso de S_1, y el error cometido (el área de la zona roja) está acotado por el área del rectángulo de base Δx_1 y altura $f_1=f(M_1)-f(m_1)$.

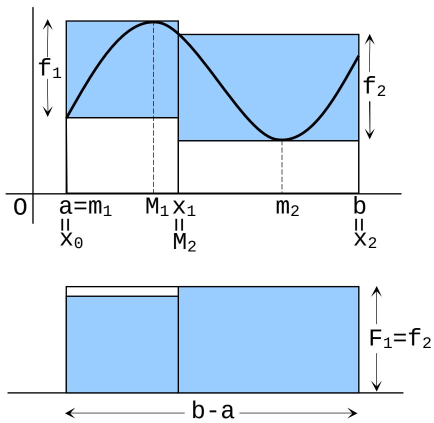
Del mismo modo, el área del rectángulo de base Δx_1 y altura $f(m_1)$ es una aproximación por defecto de S_1, y el error cometido (el área de la zona verde) está acotado igualmente por el área del rectángulo de base Δx_1 y altura $f_1=f(M_1)-f(m_1)$.



Por último, el área del rectángulo de base Δx_1 y altura $f(c_1)$ es una aproximación de S_1 (por exceso si el área de la zona roja es mayor que el área de la zona verde, y por defecto si ocurre lo contrario), y el error cometido ahora (la diferencia entre las áreas de ambas zonas, la mayor menos la menor) está acotado también por el área del rectángulo de base Δx_1 y altura $f_1=f(M_1)-f(m_1)$.[1]

Si hacemos lo mismo en el intervalo $[x_1,x_2]$, podemos entonces acotar el error cometido, e_1:

$$e_1 \leq f_1\cdot\Delta x_1+f_2\cdot\Delta x_2 \overset{2}{\leq} F_1\cdot\Delta x_1+F_1\cdot\Delta x_2=F_1\cdot(\Delta x_1+\Delta x_2)=F_1\cdot(b-a)$$



Observa que la altura del “rectángulo de acotación”, el rectángulo de base b-a y altura F_1, no depende de los puntos c_1 y c_2 que hayamos elegido.

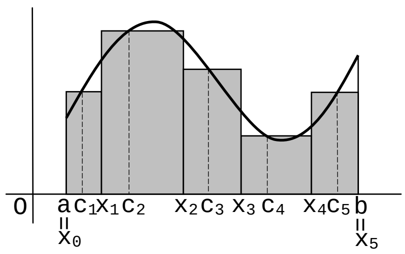
---

[1] Observa que esto es así cualquiera que sea $c_1 \in [x_0,x_1]$.

[2] F_1 es el mayor de los f_i. En este caso, como se observa en el dibujo, $F_1=f_2$.

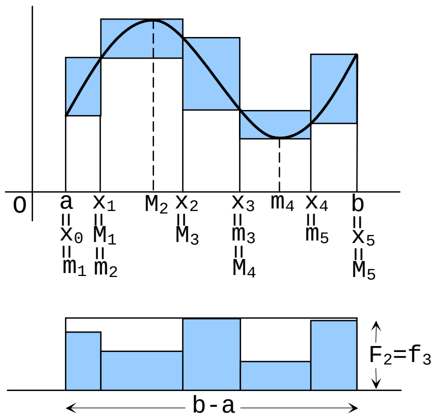
El segundo término de la sucesión queda determinado con la elección de una partición del intervalo $[a,b]$, por ejemplo $P_2=\{x_0,\dots,x_5\}$, y de cinco puntos c_i tales que $c_i\in[x_{i-1},x_i]$, $\forall i\in\{1,2,3,4,5\}$. Entonces G_2 es la suma de las áreas de los cinco rectángulos de bases Δx_i y de alturas respectivas $f(c_i)$:[1]

$$G_2=f(c_1)\cdot\Delta x_1+f(c_2)\cdot\Delta x_2+\dots+f(c_5)\cdot\Delta x_5$$



Haciendo las mismas consideraciones que con G_1, podemos acotar el error e_2 que se comete al aproximar ahora el valor de S con G_2:

$$e_2\leq f_1\cdot\Delta x_1+f_2\cdot\Delta x_2+\dots+f_5\cdot\Delta x_5 \overset{2}{\leq} F_2\cdot\Delta x_1+F_2\cdot\Delta x_2+\dots+F_2\cdot\Delta x_5=$$
$$=F_2\cdot(\Delta x_1+\Delta x_2+\dots+\Delta x_5)=F_2\cdot(b-a)$$



Igual que antes, la altura del “rectángulo de acotación”, F_2, no depende de los puntos c_i que hayamos elegido.

Por tanto, el término enésimo de la sucesión queda determinado con la elección de una partición del intervalo $[a,b]$, $P_n=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_m\}$, y de m puntos c_i tales que $c_i\in[x_{i-1},x_i]$, $\forall i\in\{1,2,\dots,m\}$. Entonces G_n es la suma de las áreas de los m rectángulos de bases Δx_i y de alturas respectivas $f(c_i)$:

$$G_n=f(c_1)\cdot\Delta x_1+f(c_2)\cdot\Delta x_2+\dots+f(c_m)\cdot\Delta x_m \overset{3}{=} \sum_{i=1}^{m} f(c_i)\cdot\Delta x_i$$

---

[1] El diámetro de la partición P_2 es (ver dibujo) $|P_2|=\Delta x_2$.

[2] F_2 es el mayor de los f_i. En este caso (ver dibujo) $F_2=f_3$.

[3] La suma $f(c_1)\cdot\Delta x_1+f(c_2)\cdot\Delta x_2+\dots+f(c_m)\cdot\Delta x_m$ se expresa abreviadamente mediante el símbolo Σ, seguido del sumando i-ésimo de dicha suma e indicando debajo del símbolo el primer valor del subíndice i, y encima, el último. Se lee *sumatorio, desde i=1 hasta m, de* $f(c_i)\cdot\Delta x_i$.

El error cometido verifica:

$$0 \overset{1}{\leq} e_n \overset{2}{\leq} F_n \cdot (b-a)$$

Por la regla del sándwich, como b-a es constante, si F_n (la altura del "rectángulo de acotación") tiende a cero, también lo hará e_n (el error cometido) y, en consecuencia, $\lim G_n = S$.

Ahora bien, es fácil ver[3] que conforme disminuye el diámetro de la partición, también lo hace la altura del correspondiente "rectángulo de acotación".

Por tanto, de todas las infinitas sucesiones que hemos visto que se pueden construir, sólo de aquellas cuyo diámetro tiende a cero se puede asegurar que su límite es S.[4]

* * *

En resumen: si f es una función continua y no negativa en el intervalo cerrado [a,b], $P_n=\{x_0,x_1,\dots,x_m\}$ es una sucesión de particiones[5] de dicho intervalo tal que $\lim|P_n|=0$ y, $\forall i\in\{1,2,\dots,m\}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $c_i \in [x_{i-1},x_i]$, entonces el área de la región del plano limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas x=a y x=b es el límite de la siguiente sucesión:

$$G_n = \sum_{i=1}^{m} f(c_i)\cdot\Delta x_i$$

2.- Ejemplos

Hallemos el área limitada por la gráfica de la función f(x)=k, el

---

[1] Como el error cometido es el valor absoluto de la diferencia entre el valor real y el aproximado, no puede ser negativo.

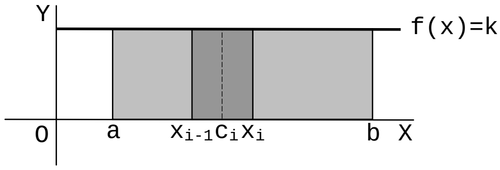
[2] F_n es el mayor de los números f_i, esto es, la altura del "rectángulo de acotación", que, como hemos visto, no depende de los puntos c_i que hayamos elegido.

[3] Conforme el diámetro tiende a cero, todos los Δx_i tienden a cero, con lo que los correspondientes m_i y M_i están cada vez más próximos y, al ser f continua en [a,b], también lo están los puntos de la gráfica de f de abscisas m_i y M_i; en consecuencia, la diferencia de sus ordenadas, esto es, $f(M_i)-f(m_i)=f_i$, tenderá a cero; y si las f_i tienden a cero, también tiende a cero la mayor de ellas, esto es, F_n. La demostración rigurosa de esta propiedad se sale del programa de este curso.

[4] Observa que para que el diámetro tienda a cero es *necesario* que, cuando n tiende a $+\infty$, m, el número de rectángulos, también tienda a $+\infty$. Si todos los términos de la sucesión G_n son la suma de, como mucho, 30 rectángulos, entonces el diámetro de todas las particiones utilizadas para construir esa sucesión es siempre mayor o igual que (b-a)/30; y, por tanto, cuando n tiende a $+\infty$, el diámetro no tiende a cero. Pero no es *suficiente* que m tienda a $+\infty$ para que el diámetro tienda a cero. Por ejemplo, podríamos dividir el intervalo [a,b] en dos partes iguales, y, dejando la primera intacta, ir dividiendo la otra en cada vez más partes. En este caso, m tiende a $+\infty$, pero el diámetro de todas las particiones es entonces (b-a)/2, ya que en todas ellas x_1 es el punto medio del segmento [a,b].

[5] Para cada término de la sucesión G_n hemos realizado una partición del intervalo [a,b].

eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$:[1]



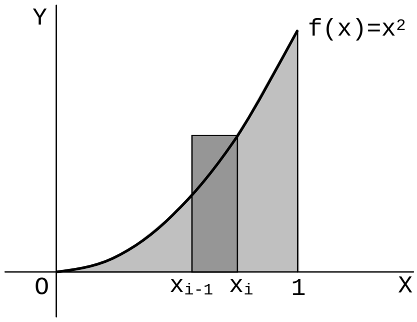
$$S=\text{lím}\,G_n=\text{lím}\,[f(c_1)\cdot\Delta x_1+f(c_2)\cdot\Delta x_2+\ldots+f(c_m)\cdot\Delta x_m]\overset{2}{=}$$

$$=\text{lím}\,(k\cdot\Delta x_1+k\cdot\Delta x_2+\ldots+k\cdot\Delta x_m)=\text{lím}\,[k\cdot(\Delta x_1+\Delta x_2+\ldots+\Delta x_m)]=$$

$$=\text{lím}[k\cdot(b-a)]=k\cdot(b-a)$$

* * *

Calculemos el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)=x^2$, el eje de abscisas y la recta $x=1$:



$$S\overset{3}{=}\text{lím}\,G_n=\text{lím}\,[f(x_1)\cdot\Delta x+f(x_2)\cdot\Delta x+\ldots+f(x_n)\cdot\Delta x]=$$

$$=\text{lím}\,\{\Delta x\cdot[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)]\}\overset{4}{=}\text{lím}\,(\Delta x\cdot[x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2])\overset{5}{=}$$

$$=\text{lím}\left(\frac{1}{n}\cdot\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(2\cdot\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)^2\right]\right)=\text{lím}\left(\frac{1}{n}\cdot\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+2^2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+n^2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]\right)=$$

$$=\text{lím}\left(\frac{1}{n^3}\cdot[1^2+2^2+...+n^2]\right)\overset{6}{=}\text{lím}\left(\frac{1}{n^3}\cdot\left[\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right]\right)=\text{lím}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)=\frac{1}{3}$$

---

[1] Esta área ya la conocemos, pero lo que aquí interesa es obtenerla como límite de una sucesión G_n. Observa que en este caso no importa que la sucesión elegida para el cálculo del área no cumpla con la condición de que su diámetro tienda a cero.

[2] Ya que $f(x)=k$.

[3] De todas las posibles sucesiones G_n vamos a utilizar, igual que haremos en los problemas, aquella en la que $m=n$, $\Delta x_1=\Delta x_2=\ldots=\Delta x_m=\Delta x$ y $c_i=x_i$, esto es, la que tiene por término enésimo la suma de las áreas de n rectángulos de igual base y alturas los valores que la función alcanza en los extremos derechos de cada subintervalo. Observa que, cuando n tiende a $+\infty$, el diámetro de la partición tiende a cero, ya que, si dividimos el intervalo [0,1] en n partes iguales, como la longitud del intervalo es 1, cada una de dichas partes mide 1/n. Por tanto, $|P_n|=\Delta x=1/n$.

[4] Ya que $f(x)=x^2$.

[5] Como $\Delta x=1/n$, entonces $x_1=1/n$, $x_2=2\cdot 1/n, \ldots, x_n=n\cdot 1/n=1$.

[6] Es fácil probar por el método de inducción completa que $1^2+2^2+\ldots+n^2=n^3/3+n^2/2+n/6$.

3.- Problemas

1) Halla el área encerrada por la gráfica de la función $y=x^2$, el eje de abscisas y la recta $x=2$.

2) Calcula el área del rectángulo limitado por la recta $y=3$, el eje de abscisas y las rectas $x=2$ y $x=7$.

3) Halla el área del triángulo rectángulo limitado por la recta $y=x$, el eje de abscisas y la recta $x=5$.

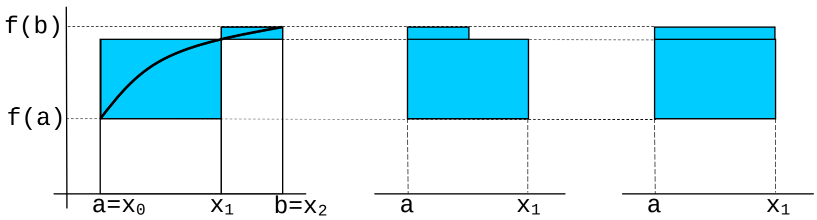
4) Calcula el área del trapecio rectángulo limitado por la recta $y=x$, el eje de abscisas y las rectas $x=2$ y $x=7$.

5) Halla[1] el área encerrada por la gráfica de la función $y=x^3$, el eje de abscisas y la recta $x=1$.

6) Calcula el área encerrada por la gráfica de la función $y=e^x$, la recta $x=1$ y los ejes de coordenadas.

7) Calcula el valor aproximado del área encerrada por la gráfica de la función $y=\operatorname{sen} x$, el eje de abscisas y la recta $x=\pi/2$. Utiliza para ello el décimo término de la sucesión G_n.[2]

8) Sea f una función continua, no negativa y *creciente*[3] en $[a,b]$. Sea $P_1=\{x_0,x_1,x_2\}$ la partición que determina el primer término de la sucesión G_n. Sean c_1 y c_2 los puntos que tú quieras.



Como se trata de una función creciente, $m_1=x_0$ y $M_1=x_1$. Por tanto:

$$f_1=f(M_1)-f(m_1)=f(x_1)-f(x_0)$$

Lo mismo sucede en el intervalo $[x_1,x_2]$:

$$f_2=f(M_2)-f(m_2)=f(x_2)-f(x_1)$$

Teniendo esto en cuenta y a la vista del gráfico anterior:

a) Acota el error cometido, e_1.

b) Acota e_n.

c) Demuestra que si $|P_n|$ tiende a cero, entonces G_n tiende a S.

---

[1] Es fácil probar por el método de inducción completa que $1^3+2^3+\ldots+n^3=n^2\cdot(n+1)^2/4$.

[2] Utiliza la sucesión indicada en la nota 3 de la página anterior.

[3] El mismo razonamiento se puede hacer con las funciones decrecientes.