Índice: Integración de funciones racionales. Problemas.

1.- Integración de funciones racionales

El método que se emplea para calcular integrales de funciones racionales[1] es el método de descomposición. Se procede como sigue.

1º) Si el grado del numerador P(x) es mayor o igual que el del denominador Q(x), se divide P(x) entre Q(x):

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array} \Rightarrow P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x) \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)} \overset{2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \int\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot dx=\int C(x)\cdot dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}\cdot dx$$

La primera integral es elemental y la segunda se resuelve como se indica a continuación.

2º) Si el grado del numerador es menor que el del denominador, se calculan las raíces del denominador. Vamos a estudiar los dos casos siguientes.[3]

CASO 1: Si todas las raíces del denominador son reales, el cociente de polinomios se descompone en una suma de fracciones según la siguiente regla:

- Cada raíz simple x_i contribuye a esa suma con un sumando de la forma:

$$\frac{A_1}{x-x_i}$$

- Cada raíz doble x_i contribuye a esa suma con dos sumandos de la forma:

$$\frac{B_1}{x-x_i}+\frac{B_2}{(x-x_i)^2}$$

- Cada raíz triple x_i contribuye a esa suma con tres sumandos de la forma:

$$\frac{C_1}{x-x_i}+\frac{C_2}{(x-x_i)^2}+\frac{C_3}{(x-x_i)^3}$$

Etc.

Las constantes que aparecen en los numeradores se calculan fácilmente, como se verá en los ejemplos. Hecho esto, la integral se descompone en una suma de integrales casi inmediatas de tipo potencial

[1] Esto es, cociente de polinomios.
[2] Por la propiedad de linealidad de la integral indefinida.
[3] Los demás casos se salen fuera del programa de este curso.

y de tipo logaritmo.

Por ejemplo, calculemos la siguiente integral:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot dx$$

Como el grado del numerador es igual que el del denominador, hacemos la división:

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -x^2+1 & 1 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot dx=\int 1\cdot dx+\int \frac{2}{x^2-1}\cdot dx \overset{1}{=} x+\int \frac{2}{x^2-1}\cdot dx$$

Para calcular esta última integral, hallamos las raíces del denominador:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

Por tanto:

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1}$$

Como las fracciones inicial y final son iguales y tienen el mismo denominador, sus numeradores deben coincidir:

$$2=A(x-1)+B(x+1)$$

Para calcular A y B se pueden utilizar dos métodos:

1º) Dar dos valores a x en la ecuación anterior:[2]

$x=-1 \Rightarrow 2=-2A \Rightarrow A=-1$

$x=1 \Rightarrow 2=2B \Rightarrow B=1$

2º) Resolver el sistema que resulta al igualar los coeficientes del mismo grado de ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{cases} 0=A+B \\ 2=-A+B \end{cases} \overset{3}{\Rightarrow} \begin{cases} 0=A+B \\ 2=2B \end{cases} \overset{4}{\Rightarrow} \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot dx=x+\int \frac{2}{x^2-1}\cdot dx=x+\int \frac{-1}{x+1}\cdot dx+\int \frac{1}{x-1}\cdot dx \overset{5}{=} x-\int \frac{1}{x+1}\cdot dx+\int \frac{1}{x-1}\cdot dx=$$

---

[1] La primera integral es inmediata de tipo potencial.
[2] Se eligen siempre las raíces del denominador para simplificar los cálculos. Este es el método más recomendable de los dos.
[3] A la segunda ecuación le sumamos la primera.
[4] Sustituimos en la primera ecuación el valor de B obtenido en la segunda.
[5] Por la propiedad de linealidad de la integral indefinida.

$$\overset{1}{=} x-\ln|x+1|+\ln|x-1|+C$$

Por ejemplo, calculemos la siguiente integral:

$$\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} \cdot dx$$

Hallamos las raíces del denominador:

$$x^3+x^2-2x=0 \Rightarrow x(x^2+x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x+2)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+2)}{x(x-1)(x+2)}$$

Como las fracciones inicial y final son iguales y tienen el mismo denominador, sus numeradores deben coincidir:

$$2x^2+5x-1=A(x+2)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+2)$$

Calculemos A, B y C por los dos métodos mencionados antes.

1º) Dar tres valores a x en la ecuación anterior:

$x=-2 \Rightarrow 8-10-1=B\cdot(-2)(-3) \Rightarrow -3=6B \Rightarrow B=-1/2$

$x=0 \Rightarrow -1=A\cdot 2\cdot(-1) \Rightarrow -1=-2A \Rightarrow A=1/2$

$x=1 \Rightarrow 2+5-1=C\cdot 3 \Rightarrow 6=C\cdot 3 \Rightarrow C=2$

2º) Resolver el sistema que resulta al igualar los coeficientes del mismo grado de ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{cases} 2=A+B+C \\ 5=A-B+2C \\ -1=-2A \end{cases} \overset{2}{\Rightarrow} \begin{cases} 3/2=B+C \\ 9/2=-B+2C \\ A=1/2 \end{cases} \overset{3}{\Rightarrow} \begin{cases} 3/2=B+C \\ 6=3C \\ A=1/2 \end{cases} \overset{4}{\Rightarrow} \begin{cases} B=-1/2 \\ C=2 \\ A=1/2 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} \cdot dx = \int \frac{1/2}{x} \cdot dx + \int \frac{-1/2}{x+2} \cdot dx + \int \frac{2}{x-1} \cdot dx \overset{5}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x+2} \cdot dx + 2 \cdot \int \frac{1}{x-1} \cdot dx \overset{6}{=} \frac{1}{2} \cdot \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \ln|x+2| + 2 \cdot \ln|x-1| + C$$

Otro ejemplo:

---

[1] Se trata de dos integrales casi inmediatas de tipo logaritmo. Si se desea, puede simplificarse el resultado final agrupando los dos últimos sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

[2] Sustituimos en las dos primeras ecuaciones el valor de A obtenido en la tercera.

[3] Sumamos a la segunda ecuación la primera.

[4] Sustituimos en la primera ecuación el valor de C obtenido en la segunda.

[5] Por la propiedad de linealidad de la integral indefinida.

[6] Se trata de tres integrales de tipo logaritmo, la primera inmediata y las otras dos casi inmediatas. Si se desea, puede simplificarse el resultado final agrupando los sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

$$\int\frac{2x^2+6x-4}{x^3+4x^2+4x}\cdot dx$$

Calculamos las raíces del denominador:

$$x^3+4x^2+4x=0 \Rightarrow x(x^2+4x+4)=0 \Rightarrow x(x+2)^2=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0 \text{ simple}\\ x=-2 \text{ doble}\end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{2x^2+6x-4}{x(x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}=\frac{A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx}{x(x+2)^2}$$

Como las fracciones inicial y final son iguales y tienen el mismo denominador, sus numeradores deben coincidir:

$$2x^2+6x-4=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx$$

Calculemos A, B y C por los dos métodos mencionados:

1º) Dar tres valores a x en la ecuación anterior:[1]

$x=-2 \Rightarrow 8-12-4=-2C \Rightarrow -8=-2C \Rightarrow C=4$

$x=0 \Rightarrow -4=4A \Rightarrow A=-1$

$x=1 \overset{2}{\Rightarrow} 2+6-4=(-1)\cdot 9+3B+4 \Rightarrow 9=3B \Rightarrow B=3$

2º) Resolver el sistema que resulta al igualar los coeficientes del mismo grado de ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{cases}2=A+B\\ 6=4A+2B+C\\ -4=4A\end{cases} \overset{3}{\Rightarrow} \begin{cases}2=-1+B\\ 6=-4+2B+C\\ A=-1\end{cases} \overset{4}{\Rightarrow} \begin{cases}B=3\\ 10=6+C\\ A=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-1\\ B=3\\ C=4\end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int\frac{2x^2+6x-4}{x^3+4x^2+4x}\cdot dx=\int\frac{-1}{x}\cdot dx+\int\frac{3}{x+2}\cdot dx+\int\frac{4}{(x+2)^2}\cdot dx \overset{5}{=}$$

$$=-\int\frac{1}{x}\cdot dx+3\cdot\int\frac{1}{x+2}\cdot dx+4\cdot\int(x+2)^{-2}\cdot dx \overset{6}{=} -\ln|x|+3\cdot\ln|x+2|+\frac{(x+2)^{-2+1}}{-2+1}+C \overset{7}{=}$$

$$=-\ln|x|+3\cdot\ln|x+2|-\frac{1}{x+2}+C$$

CASO 2: Si $Q(x)=ax^2+bx+c$ es un polinomio de segundo grado con raíces complejas, se escribe en la forma $Q(x)=a[(x-p)^2+q^2]$, se saca a fuera de la integral y se hace el cambio $x-p=q\cdot t$.

[1] Observa que además de las raíces hemos tenido que utilizar aquí un valor más.
[2] Sustituimos A y C por sus respectivos valores ya calculados.
[3] Hemos sustituido en las dos primeras ecuaciones el valor de A obtenido en la tercera.
[4] Hemos sustituido en la segunda ecuación el valor de B obtenido en la primera.
[5] Por la propiedad de linealidad de la integral indefinida.
[6] Las dos primeras integrales son de tipo logaritmo, la primera inmediata y la segunda casi inmediata, mientras que la tercera es casi inmediata de tipo potencial.
[7] Si se desea, puede simplificarse el resultado final agrupando los dos primeros sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.

Si el numerador es una constante, sale una integral de tipo arco tangente; si el numerador es un polinomio de primer grado, sale una integral de tipo arco tangente y otra de tipo logaritmo.

Por ejemplo:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\cdot dx$$

Calculamos las raíces del denominador:

$$x^2+4x+5=0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\cdot dx \overset{1}{=} \int \frac{1}{(x+2)^2+1^2}\cdot dx \overset{2}{=} \int \frac{1}{t^2+1}\cdot dt \overset{3}{=} \operatorname{arc\,tg} t+C \overset{4}{=} \operatorname{arc\,tg}(x+2)+C$$

Otro ejemplo:

$$\int \frac{x-7}{x^2-2x+5}\cdot dx$$

Calculamos las raíces del denominador:

$$x^2-2x+5=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x-7}{x^2-2x+5}\cdot dx \overset{1}{=} \int \frac{x-7}{(x-1)^2+2^2}\cdot dx \overset{5}{=} \int \frac{2t-6}{4t^2+4}\cdot 2\cdot dt=\int \frac{t-3}{t^2+1}\cdot dt=$$

$$=\int\left(\frac{t}{t^2+1}-\frac{3}{t^2+1}\right)\cdot dt \overset{6}{=} \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2t}{t^2+1}\cdot dt-3\cdot\int \frac{1}{t^2+1}\cdot dt \overset{7}{=} \frac{1}{2}\cdot \ln(t^2+1)-3\cdot \operatorname{arc\,tg} t+C \overset{8}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot \ln\frac{x^2-2x+5}{4}-3\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+C \overset{9}{=} \frac{1}{2}\cdot \ln(x^2-2x+5)-3\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+D$$

---

[1] Se descompone el denominador en suma de dos cuadrados de forma que uno de ellos sea constante.
[2] Se hace el cambio $x+2=t$ (esto es, la base de la potencia que contiene a la incógnita x se iguala a la otra base multiplicada por t), $dx=dt$.
[3] Se trata de una integral inmediata de tipo arco tangente.
[4] Deshacemos el cambio.
[5] Igual que antes, se hace el cambio $x-1=2t$, $dx=2\cdot dt$.
[6] Por la propiedad de linealidad de la integral indefinida.
[7] La primera integral es casi inmediata de tipo logaritmo y la segunda inmediata de tipo arco tangente. Como $t^2+1>0$, hemos eliminado el signo de valor absoluto.
[8] Deshacemos el cambio. Observa que $4t^2+4$, el denominador de la integral que aparece en tercer lugar en este cálculo, es igual a x^2-2x+5, el denominador de la integral de partida. Por tanto, $t^2+1=(x^2-2x+5)/4$.
[9] Como $\ln[(x^2-2x+5)/4]=\ln(x^2-2x+5)-\ln 4$, hemos sustituido $-(1/2)\cdot\ln 4+C$ por D.

2.- Problemas

1) Calcula las siguientes integrales racionales:

a) $\int \frac{x^4}{x^3-3x+2}\cdot dx$ **b)** $\int \frac{x^3+8x^2+14x+6}{(x+1)^3(x+2)}\cdot dx$ **c)** $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

d) $\int \frac{x+3}{x^2+x-2}\cdot dx$ **e)** $\int \frac{x^2+1}{x(x+1)(x+3)}\cdot dx$ **f)** $\int \frac{x-1}{x^2-5x+6}\cdot dx$

g) $\int \frac{dx}{x^2+x-6}$ **h)** $\int \frac{x}{(x-1/2)(x+3/4)}\cdot dx$ **i)** $\int \frac{dx}{x^2-4}$

j) $\int \frac{3x+2}{x^3-x}\cdot dx$ **k)** $\int \frac{x+1}{x-1}\cdot dx$ **l)** $\int \frac{dx}{(x-2)(x^2-9)}$

m) $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{x^2-4}\cdot dx$ **n)** $\int \frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x}\cdot dx$ **ñ)** $\int \frac{x^2+x}{x^2-x}\cdot dx$

o) $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\cdot dx$ **p)** $\int \frac{x+1}{2x^2-x-1}\cdot dx$ **q)** $\int \frac{x^4-x^2}{x-1/2}\cdot dx$

r) $\int \frac{-x^2+6x-1}{x^3-x^2-x+1}\cdot dx$ **s)** $\int \frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}\cdot dx$ **t)** $\int \frac{x^4}{x^2-2x+1}\cdot dx$

u) $\int \frac{x-1}{x^3-3x^2+4}\cdot dx$ **v)** $\int \frac{5x^2-15x+12}{x^3-4x^2+4x}\cdot dx$ **w)** $\int \frac{x}{x^2-6x+13}\cdot dx$

x) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\cdot dx$ **y)** $\int \frac{x}{x^4+9}\cdot dx$ **z)** $\int \frac{3x-8}{x^2-6x+18}\cdot dx$

2) Convierte en racionales las siguientes integrales y calcúlalas:

a) $\int \frac{dx}{e^x-1}$ **b)** $\int \frac{dx}{x\cdot(9-\ln^2 x)}$ **c)** $\int \frac{\operatorname{sen} x\cdot dx}{\cos^2 x+2\cdot\cos x+2}$

d) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\cdot dx$ **e)** $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x}$ **f)** $\int \ln(x^2+x-2)\cdot dx$

g) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{(x+4)^3}}$ **h)** $\int \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}\cdot dx$ **i)** $\int \frac{dx}{e^{2x}+2e^x-3}$

j) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$ **k)** $\int \frac{e^x\cdot dx}{e^{2x}+3\cdot e^x+2}$ **l)** $\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x^2}\cdot dx$

m) $\int x\cdot\ln\frac{1-x}{1+x}\cdot dx$ **n)** $\int \frac{dx}{x\cdot(3\sqrt{x}+1)}$ **ñ)** $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-x^2}}$