Índice: Integración por descomposición. Problemas.

1.- Integración por descomposición

Este método consiste en aplicar la propiedad de linealidad de la integral indefinida.

Por ejemplo, calculemos la siguiente integral:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\cdot dx$$

Sumamos y restamos 1 al numerador:[1]

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\cdot dx=\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\cdot dx=\int\left(\frac{1+x^2}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot dx \overset{2}{=}$$

$$=\int 1\cdot dx-\int \frac{1}{1+x^2}\cdot dx \overset{3}{=} x-\operatorname{arc\,tg} x+C$$

Otro ejemplo:

$$\int \frac{x^3-5\cdot\sqrt{x}+8}{x}\cdot dx$$

Hacemos la división:

$$\int \frac{x^3-5\cdot\sqrt{x}+8}{x}\cdot dx=\int\left(x^2-5\cdot x^{-1/2}+\frac{8}{x}\right)\cdot dx \overset{2}{=} \int x^2\cdot dx-5\cdot\int x^{-1/2}+8\cdot\int\frac{1}{x}\cdot dx \overset{4}{=}$$

$$=\frac{x^3}{3}-5\cdot\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1}+8\cdot \ln|x|+C=\frac{1}{3}\cdot x^3-10\cdot\sqrt{x}+8\cdot\ln|x|+C$$

Otro ejemplo:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\cdot dx$$

Escribimos la tangente como cociente de seno entre coseno:

$$\int \operatorname{tg}^2 x\cdot dx=\int\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\cdot dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\cdot dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)\cdot dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\cdot dx \overset{2}{=} \int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot dx-\int 1\cdot dx \overset{5}{=} \operatorname{tg} x-x+C$$

[1] Se obtiene el mismo resultado haciendo la división de x^2 entre x^2+1.
[2] Por la propiedad de linealidad de la integral indefinida.
[3] Se trata de dos integrales inmediatas, la primera de tipo potencial y la segunda de tipo arco tangente.
[4] Se trata de tres integrales inmediatas, las dos primeras de tipo potencial y la última de tipo logaritmo.
[5] Se trata de dos integrales inmediatas, la primera de tipo tangente y la segunda de tipo potencial.

Otra forma de hacerla es la siguiente:

$$\int tg^2x\cdot dx=\int(1+tg^2x-1)\cdot dx \overset{1}{=} \int(1+tg^2x)\cdot dx-\int 1\cdot dx \overset{2}{=} tg\,x-x+C$$

Un ejemplo más:

$$\int\frac{1}{sen^2x\cdot cos^2x}\cdot dx$$

Aplicamos la propiedad fundamental de la trigonometría:

$$\int\frac{1}{sen^2x\cdot cos^2x}\cdot dx=\int\frac{sen^2x+cos^2x}{sen^2x\cdot cos^2x}\cdot dx=\int\left(\frac{sen^2x}{sen^2x\cdot cos^2x}+\frac{cos^2x}{sen^2x\cdot cos^2x}\right)\cdot dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{cos^2x}+\frac{1}{sen^2x}\right)\cdot dx \overset{1}{=} \int\frac{1}{cos^2x}\cdot dx+\int\frac{1}{sen^2x}\cdot dx \overset{3}{=} tg\,x-ctg\,x+C$$

2.- Problemas

1) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int(x+1+\sqrt{x})\cdot dx$ **b)** $\int\left(x^2+1-\frac{1}{x^2+1}\right)\cdot dx$ **c)** $\int\frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}\cdot dx$

d) $\int ln(2^x\cdot e^{x/2})\cdot dx$ **e)** $\int sen^2x\cdot cos^3x\cdot dx$ **f)** $\int cos^2x\cdot dx$

g) $\int sen\,x\cdot cos(5x)\cdot dx$ **h)** $\int\frac{x^3}{1+x^2}\cdot dx$ **i)** $\int(x+1)\cdot\sqrt{x}\cdot dx$

j) $\int\frac{dx}{sen\,x\cdot cos\,x}$ **k)** $\int\frac{\sqrt{x}+ln\,x}{x}\cdot dx$ **l)** $\int\frac{1+sen\,x}{cos^2x}\cdot dx$

m) $\int\frac{dx}{1+e^x}$ **n)** $\int\frac{sen(2x)}{cosec(4x)}\cdot dx$ **ñ)** $\int sen^5x\cdot dx$

2) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int\frac{(x+1)^2}{1+x^2}\cdot dx$ **b)** $\int tg^3x\cdot dx$ **c)** $\int\frac{2x-1}{1+x^2}\cdot dx$

d) $\int\frac{cos^3x}{sen^4x}\cdot dx$ **e)** $\int\frac{x+arc\,sen\,x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$ **f)** $\int\frac{1}{cos^4x}\cdot dx$

g) $\int\frac{1+sen\,x}{1-sen\,x}\cdot dx$ **h)** $\int\frac{1+ln^2x}{x}\cdot dx$ **i)** $\int sen^3x\cdot dx$

j) $\int\frac{1+x\cdot ln(1+x^2)}{1+x^2}\cdot dx$ **k)** $\int\frac{1+e^{tgx}}{cos^2x}\cdot dx$ **l)** $\int\frac{1-ln\,x}{x\cdot ln\,x}\cdot dx$

m) $\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\cdot dx$ **n)** $\int\frac{1}{1-cos\,x}\cdot dx$ **ñ)** $\int\frac{x+2}{x+1}\cdot dx$

---

[1] Por la propiedad de linealidad de la integral indefinida.
[2] Se trata de dos integrales inmediatas, la primera de tipo tangente y la segunda de tipo potencial.
[3] Se trata de dos integrales inmediatas, la primera de tipo tangente y la segunda de tipo cotangente.