Índice: Integración por sustitución. Problemas.

1.- Integración por sustitución[1]

Aunque es muy conveniente saber calcular directamente las integrales casi inmediatas, como lo hemos hecho en la lección I-7, existe la alternativa de reducirlas a las correspondientes integrales inmediatas con el siguiente cambio de variable (lo que facilita el cálculo):

$$u(x)=t \overset{2}{\Rightarrow} u'(x)\cdot dx=dt$$

Así:

$$\int(1+tg^2u)\cdot u'\cdot dx \overset{3}{=} \int(1+tg^2t)\cdot dt \overset{4}{=} tg\,t+C \overset{5}{=} tg\,u+C$$

* * *

Por ejemplo:[6]

$$\int\frac{1}{(x-3)^4}\cdot dx$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$x-3=t \Rightarrow dx=dt$$

Por tanto:

$$\int\frac{1}{(x-3)^4}\cdot dx=\int\frac{1}{t^4}\cdot dt=\int t^{-4}\cdot dt \overset{4}{=} \frac{t^{-4+1}}{-4+1}+C=\frac{-1}{3\cdot t^3}+C \overset{5}{=} \frac{-1}{3\cdot(x-3)^3}+C$$

Otro ejemplo:[7]

$$\int\frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot dx$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\sqrt{x}=t \overset{8}{\Rightarrow} x=t^2 \Rightarrow dx=2t\cdot dt$$

$$\int\frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot dx=\int\frac{sen\,t}{t}\cdot 2t\cdot dt=2\cdot\int sen\,t\cdot dt \overset{4}{=} -2\cdot cos\,t+C \overset{5}{=} -2\cdot cos\sqrt{x}+C$$

---

[1] O cambio de variable.
[2] La diferencial que *cierra* la integral es siempre la de la variable independiente de la función integrando. Por tanto, si se cambia de variable, debe cambiarse también de diferencial.
[3] Al hacer el cambio, aparece la correspondiente integral inmediata.
[4] Aplicamos la tabla de las integrales inmediatas.
[5] Deshacemos el cambio.
[6] Se trata de una integral casi inmediata de tipo potencial.
[7] Se trata de una integral casi inmediata de tipo coseno.
[8] Elevamos al cuadrado para facilitar el cálculo de las diferenciales.

* * *

Los cambios de variable también permiten calcular otras integrales. En general, estos cambios son, como ya vimos, de la forma:

$$g(x)=h(t) \Rightarrow g'(x)\cdot dx=h'(t)\cdot dt$$

Por ejemplo, calculemos la siguiente integral:

$$\int\frac{dx}{(\sqrt{x+1}+1)^2}$$

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{x+1}=t \Rightarrow x+1=t^2 \Rightarrow dx=2t\cdot dt$$

Por tanto:

$$\int\frac{dx}{(\sqrt{x+1}+1)^2}=\int\frac{2t\cdot dt}{(t+1)^2}=2\cdot\int\frac{t}{(t+1)^2}\cdot dt$$

Esta es una integral racional.[1] Veremos algunos casos de este tipo de integrales en la lección I-11. Sin embargo, ésta puede resolverse mediante otro cambio de variable:

$$t+1=z \Rightarrow dt=dz$$

En efecto:

$$\int\frac{dx}{(\sqrt{x+1}+1)^2}=2\cdot\int\frac{t}{(t+1)^2}\cdot dt=2\cdot\int\frac{z-1}{z^2}\cdot dz=2\cdot\int\left(\frac{z}{z^2}-\frac{1}{z^2}\right)\cdot dz \overset{2}{=} 2\cdot\left(\int\frac{1}{z}\cdot dz-\int z^{-2}\cdot dz\right) \overset{3}{=}$$

$$=2\cdot\ln|z|-2\cdot\frac{z^{-2+1}}{-2+1}+C=2\cdot\ln|z|+\frac{2}{z}+C \overset{4}{=} 2\cdot\ln|t+1|+\frac{2}{t+1}+C \overset{5}{=}$$

$$=2\cdot\ln(\sqrt{x+1}+1)+\frac{2}{\sqrt{x+1}+1}+C$$

Esta integral puede hacerse mediante un único cambio: $\sqrt{x+1}+1=t$.

Otro ejemplo:

$$\int\frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot dx$$

Hacemos el siguiente cambio:

$$\sqrt{x^2-1}=t \Rightarrow x^2-1=t^2 \Rightarrow 2x\cdot dx=2t\cdot dt \Rightarrow x\cdot dx=t\cdot dt$$

---

[1] Un cociente de polinomios.
[2] Por la propiedad de linealidad de la integral indefinida.
[3] Se trata de dos integrales inmediatas, la primera de tipo logaritmo y la segunda de tipo potencial.
[4] Deshacemos el segundo cambio de variable.
[5] Deshacemos el primer cambio. Eliminamos el símbolo de valor absoluto ya que el argumento del logaritmo es positivo.

Por tanto:

$$\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot dx=\int \frac{x\cdot dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{t\cdot dt}{(t^2+1)\cdot t}=\int \frac{dt}{t^2+1} \overset{1}{=} \operatorname{arc\,tg} t+C \overset{2}{=} \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}+C$$

Un ejemplo más:

$$\int \frac{e^x\cdot(e^x+1)}{(e^x-2)^2}\cdot dx$$

Hacemos el siguiente cambio:

$$e^x-2=t \Rightarrow e^x\cdot dx=dt$$

Por tanto:

$$\int \frac{e^x\cdot(e^x+1)}{(e^x-2)^2}\cdot dx=\int \frac{t+3}{t^2}\cdot dt=\int\left(\frac{t}{t^2}+\frac{3}{t^2}\right)\cdot dt \overset{3}{=} \int \frac{1}{t}\cdot dt+3\cdot\int t^{-2}\cdot dt \overset{4}{=}$$

$$=\ln|t|+3\cdot\frac{t^{-2+1}}{-2+1}+C=\ln|t|-\frac{3}{t}+C \overset{2}{=} \ln|e^x-2|-\frac{3}{e^x-2}+C$$

2.- Problemas

1) Calcula las siguientes integrales casi inmediatas directamente o mediante un cambio de variable adecuado:

a) $\int \frac{3^x}{2^x}\cdot dx$	**b)** $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\cdot dx$	**c)** $\int \frac{\ln^2(3x)}{x}\cdot dx$
d) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x}$	**e)** $\int \frac{\operatorname{sen}\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\cdot dx$	**f)** $\int \frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$
g) $\int(\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^5 x)\cdot dx$	**h)** $\int \frac{dx}{1+(x-1)^2}$	**i)** $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\cdot dx$
j) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$	**k)** $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\cdot dx$	**l)** $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\cdot dx$
m) $\int e^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x\cdot dx$	**n)** $\int \frac{dx}{(1+x^2)\cdot\operatorname{arc\,tg} x}$	**ñ)** $\int \frac{\cos\ln x}{x}\cdot dx$
o) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}\cdot dx$	**p)** $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}\cdot dx$	**q)** $\int \frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{ctg} x}\cdot dx$
r) $\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x^2}\cdot dx$	**s)** $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}\cdot dx$	**t)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$
u) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\cdot dx$	**v)** $\int x\cdot\operatorname{tg} x^2\cdot dx$	**w)** $\int \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\cdot dx$

[1] Se trata de una integral inmediata de tipo arco tangente.
[2] Deshacemos el cambio.
[3] Por la propiedad de linealidad de la integral indefinida.
[4] Se trata de dos integrales inmediatas, la primera de tipo logaritmo y la segunda de tipo potencial.

x) $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx$ **y)** $\int \frac{\sec x \cdot \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\sec^2 x}} \cdot dx$ **z)** $\int \frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{\sqrt{1+\operatorname{ctg} x}} \cdot dx$

2) Mediante un cambio de variable apropiado, calcula:

a) $\int \frac{x}{(x-1)^3} \cdot dx$ **b)** $\int \frac{dx}{x^2+16}$ **c)** $\int e^{x+e^x} \cdot dx$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{arc\,sen} x}$ **e)** $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$ **f)** $\int \frac{x}{x^4+1} \cdot dx$

g) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} \cdot dx$ **h)** $\int \frac{2}{3+\sqrt{x}} \cdot dx$ **i)** $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}} \cdot dx$

j) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \cdot dx$ **k)** $\int \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1-\operatorname{sen} x} \cdot dx$ **l)** $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

m) $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$ **n)** $\int \frac{1+x}{2x^2+18} \cdot dx$ **ñ)** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

o) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ **p)** $\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}} \cdot dx$ **q)** $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$

r) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}(x/2)}{4+x^2} \cdot dx$ **s)** $\int x \cdot \sqrt{1+x} \cdot dx$ **t)** $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} \cdot dx$

u) $\int \frac{\operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} \cdot dx$ **v)** $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\ln \cos x} \cdot dx$ **w)** $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

x) $\int x \cdot (2-x)^7 \cdot dx$ **y)** $\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1+2 \cdot \operatorname{tg} x}} \cdot dx$ **z)** $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x-1}}$

3) En el siglo XIX se demostró un teorema del que se deduce que la integral $\int (e^x/x) \cdot dx$ no es elemental. Apoyándote en este resultado, prueba que tampoco lo son:

a) $\int \frac{1}{\ln x} \cdot dx$ **b)** $\int e^{e^x} \cdot dx$

4) A finales del siglo XX se demostró que la integral $\int x^{2n} \cdot e^{ax^2} \cdot dx$, con $a \neq 0$ y n entero, no es elemental. Prueba, basándote en este resultado, que tampoco lo son:

a) $\int \sqrt{\ln x} \cdot dx$ **b)** $\int \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \cdot dx$ **c)** $\int \frac{e^{ax}}{\sqrt{x}} \cdot dx$