

Índice: Integrales inmediatas. Integrales casi inmediatas. Problemas.

1.- Integrales inmediatas

La tabla de las integrales inmediatas se obtiene fácilmente de la tabla de las derivadas de las funciones simples.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(x^{r+1})' &= (r+1) \cdot x^r \Rightarrow \int (r+1) \cdot x^r \cdot dx = x^{r+1} \stackrel{1}{\Rightarrow} (r+1) \cdot \int x^r \cdot dx = x^{r+1} \stackrel{2}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \int x^r \cdot dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C\end{aligned}$$

Si $r = -1$, tenemos lo siguiente:

$$\int x^{-1} \cdot dx = \int \frac{1}{x} \cdot dx \stackrel{3}{=} \ln|x| + C$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(a^x)' &= a^x \cdot \ln a \Rightarrow \int a^x \cdot \ln a \cdot dx = a^x \stackrel{1}{\Rightarrow} \ln a \cdot \int a^x \cdot dx = a^x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\end{aligned}$$

Y así con los demás tipos.

2.- Integrales casi inmediatas

La tabla de las integrales casi inmediatas se obtiene sin dificultad de la tabla de las derivadas de las funciones compuestas.⁴

Por ejemplo:

$$(\operatorname{sen} u)' = \cos u \cdot u' \Rightarrow \int \cos u \cdot u' \cdot dx = \operatorname{sen} u + C$$

Por ejemplo:

$$(\operatorname{arc} \operatorname{sen} u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \cdot dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} u + C$$

* * *

¹ Por la propiedad de linealidad de la integral indefinida.

² Si $r \neq -1$.

³ Recuerda que esta derivada la hemos visto en la lección D-7. Si no se pone el símbolo de valor absoluto, se obtiene la integral de $1/x$, pero sólo donde esta función es positiva, ya que el argumento del logaritmo es siempre positivo.

⁴ u y u' son funciones de x .

Si comparas las tablas de derivadas e integrales,¹ observarás que faltan en esta última las de tipo arco coseno, arco cosecante y arco cotangente. La razón es que pueden reducirse a las de tipo arco seno, arco secante y arco tangente, respectivamente. Por ejemplo:

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \cdot dx \stackrel{2}{=} - \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \cdot dx \stackrel{3}{=} -\arcsen u + C$$

Aunque también las integrales de tipo secante y cosecante se pueden reducir a las de tipo potencial, se ahorra tiempo conociéndolas. Por eso aparecen en la tabla. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \int \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot u' \cdot dx &= \int \frac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 u} \cdot u' \cdot dx = - \int \cos^{-2} u \cdot (-\operatorname{sen} u) \cdot u' \cdot dx \stackrel{4}{=} \\ &= - \frac{\cos^{-2+1} u}{-2+1} + C = \frac{1}{\cos u} + C = \sec u + C \end{aligned}$$

* * *

Para calcular las integrales casi inmediatas es preciso identificar en el integrando las funciones u y u' .

Veamos un ejemplo de cada tipo:

a) Calculemos la siguiente integral:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x \cdot dx$$

Si $u = \operatorname{sen} x$, entonces $u' = \cos x$. Por tanto, se trata de una integral casi inmediata de tipo potencial:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{\operatorname{sen}^{2+1} x}{2+1} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

b) Por ejemplo:

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x-3} \cdot dx$$

Si $u = x^2 - 2x - 3$, entonces $u' = 2x - 2 = 2(x - 1)$. Por tanto, se trata de una integral casi inmediata de tipo logaritmo:

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x-3} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2(x-1)}{x^2-2x-3} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \ln |x^2 - 2x - 3| + C$$

c) Por ejemplo:

$$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \cdot dx$$

¹ Ambas tablas puedes encontrarlas en *Resúmenes*, en este mismo blog.

² Por la propiedad de linealidad de la integral indefinida.

³ Se trata de una integral casi inmediata de tipo arco seno.

⁴ Por la propiedad de linealidad de la integral indefinida.

Si $u = \operatorname{tg} x$, entonces $u' = 1/\cos^2 x$. Por tanto, se trata de una integral casi inmediata de tipo exponencial:

$$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \cdot dx = \int e^{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = e^{\operatorname{tg} x} + C$$

d) Por ejemplo:

$$\int \frac{\cos \operatorname{ctg} x}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot dx$$

Si $u = \operatorname{ctg} x$, entonces $u' = -1/\operatorname{sen}^2 x$. Por tanto, se trata de una integral casi inmediata de tipo seno:

$$\int \frac{\cos \operatorname{ctg} x}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot dx = - \int \cos \operatorname{ctg} x \cdot \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot dx = -\operatorname{sen} \operatorname{ctg} x + C$$

e) Por ejemplo:

$$\int \frac{1}{(1+x)^2} \cdot \operatorname{sen} \frac{1-x}{1+x} \cdot dx$$

Si $u = (1-x)/(1+x)$, entonces $u' = -2/(1+x)^2$. Por tanto, se trata de una integral casi inmediata de tipo coseno:

$$\int \frac{1}{(1+x)^2} \cdot \operatorname{sen} \frac{1-x}{1+x} \cdot dx = \frac{-1}{2} \cdot \int \operatorname{sen} \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{1-x}{1+x} + C$$

f) Por ejemplo:

$$\int \frac{x \cdot \operatorname{sen} x^2}{\cos^2 x^2} \cdot dx$$

Si $u = x^2$, entonces $u' = 2x$. Por tanto, se trata de una integral casi inmediata de tipo secante:

$$\int \frac{x \cdot \operatorname{sen} x^2}{\cos^2 x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \sec x^2 \cdot \operatorname{tg} x^2 \cdot 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \sec x^2 + C$$

g) Por ejemplo:

$$\int \frac{e^x \cdot \cos e^x}{\operatorname{sen}^2 e^x} \cdot dx$$

Si $u = e^x$, entonces $u' = e^x$. Por tanto, se trata de una integral casi inmediata de tipo cosecante:

$$\int \frac{e^x \cdot \cos e^x}{\operatorname{sen}^2 e^x} \cdot dx = \int \operatorname{cosec} e^x \cdot \operatorname{ctg} e^x \cdot e^x \cdot dx = -\operatorname{cosec} e^x + C$$

h) Por ejemplo:

$$\int (1 - e^x) \cdot \sec^2(e^x - x) \cdot dx$$

Si $u=e^x-x$, entonces $u'=e^x-1$. Por tanto, se trata de una integral casi inmediata de tipo tangente:

$$\int (1-e^x) \cdot \sec^2(e^x-x) \cdot dx = -\int \sec^2(e^x-x) \cdot (e^x-1) \cdot dx = -\operatorname{tg}(e^x-x) + C$$

i) Por ejemplo:

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \operatorname{sen}^2(1/x)} \cdot dx$$

Si $u=1/x$, entonces $u'=-1/x^2$. Por tanto, se trata de una integral casi inmediata de tipo cotangente:

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \operatorname{sen}^2(1/x)} \cdot dx = -\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(1/x)} \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot dx = \operatorname{ctg}(1/x) + C$$

j) Por ejemplo:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^3+5)^2}} \cdot dx$$

Si $u=x^3+5$, entonces $u'=3x^2$. Por tanto, se trata de una integral casi inmediata de tipo arco seno:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^3+5)^2}} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1-(x^3+5)^2}} \cdot 3x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sen}(x^3+5) + C$$

k) Por ejemplo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} \cdot dx$$

Si $u=e^x$, entonces $u'=e^x$. Por tanto, se trata de una integral casi inmediata de tipo arco secante:

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} \cdot dx = \int \frac{1}{e^x \cdot \sqrt{e^{2x}-1}} \cdot e^x \cdot dx \stackrel{1}{=} \operatorname{arc} \operatorname{sec} e^x + C$$

l) Por ejemplo:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} \cdot dx$$

Si $u=\cos x$, entonces $u'=-\operatorname{sen} x$. Por tanto, se trata de una integral casi inmediata de tipo arco tangente:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} \cdot dx = -\int \frac{1}{1+\cos^2 x} \cdot (-\operatorname{sen} x) \cdot dx = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \cos x + C$$

¹ Observa que, como $e^x > 0$, $e^x = |e^x|$.

3.- Problemas

1) Identifica el tipo de integral y calcúlala:

a) $\int \frac{5}{x^2} \cdot dx$

d) $\int \frac{dx}{2+2x^2}$

g) $\int x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx$

j) $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot dx$

m) $\int \frac{x}{1+(x^2+4)^2} \cdot dx$

o) $\int \frac{1-\cos x}{x-\operatorname{sen} x} \cdot dx$

r) $\int \frac{e^x}{\cos^2 e^x} \cdot dx$

u) $\int e^x \cdot \sqrt{1-e^x} \cdot dx$

x) $\int \frac{e^{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$

b) $\int \frac{\sqrt{5}}{x} \cdot dx$

e) $\int \frac{dx}{(x+2)^8}$

h) $\int \frac{dx}{\cos^2(5x)}$

k) $\int x \cdot \operatorname{sen}(x^2+4) \cdot dx$

n) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^4 x} \cdot dx$

p) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot dx$

s) $\int \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot dx$

v) $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2+\cos(2x)} \cdot dx$

y) $\int \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{cosec}(2x)} \cdot dx$

c) $\int \cos(x+1) \cdot dx$

f) $\int \frac{x^4}{x^5+9} \cdot dx$

i) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} \cdot dx$

l) $\int \frac{4}{e^x} \cdot dx$

ñ) $\int \operatorname{tg} x \cdot dx$

q) $\int \frac{3}{\sqrt{3x-4}} \cdot dx$

t) $\int \frac{2^x}{1+4^x} \cdot dx$

w) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x - 1}$

z) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

2) Identifica el tipo de integral y calcúlala:

a) $\int \frac{6x-5}{3x^2-5x+4} \cdot dx$

d) $\int 3^{x-1} \cdot dx$

g) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$

j) $\int \frac{dx}{x \cdot \cos^2 \ln x}$

m) $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} \cdot dx$

o) $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx$

r) $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{1+\operatorname{ctg} x} \cdot dx$

u) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

x) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \cdot dx$

b) $\int x \cdot \cos(1-x^2) \cdot dx$

e) $\int (e^x+1)^3 \cdot e^x \cdot dx$

h) $\int \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx$

k) $\int \frac{e^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}}{1+x^2} \cdot dx$

n) $\int \operatorname{ctg}^3 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x \cdot dx$

p) $\int x \cdot \sqrt{1+3x^2} \cdot dx$

s) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1-\ln^2 x}}$

v) $\int \frac{\operatorname{sec} x \cdot \operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{sec} x}} \cdot dx$

y) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} \cdot dx$

c) $\int \frac{x}{(x^2+1)^2} \cdot dx$

f) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2(1-3x)}$

i) $\int \frac{e^x}{1-2 \cdot e^x} \cdot dx$

l) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

ñ) $\int \frac{\operatorname{sec}^2 x}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}} \cdot dx$

q) $\int x \cdot a^{x^2} \cdot dx$

t) $\int \frac{\operatorname{arc} \cos x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$

w) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}}$

z) $\int \frac{\operatorname{sec}^2 x}{\operatorname{tg} x} \cdot dx$

3) Encuentra la primitiva de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ que se anula para $x=3$.