

Índice: La integral definida. Propiedad de linealidad. Problemas. Anexo.

1.- La integral definida¹

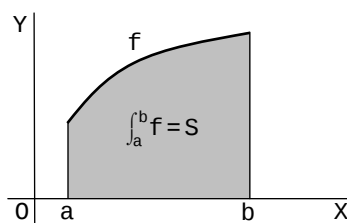
Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ es una sucesión de particiones de dicho intervalo tal que $\lim |P_n| = 0$ y, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, se llama *integral definida de la función f desde a hasta b* , y se representa por $\int_a^b f$, al límite de la sucesión $F_n = \sum_{i=1}^m f(c_i) \cdot \Delta x_i$, esto es:

$$\int_a^b f \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m f(c_i) \cdot \Delta x_i$$

Los números a y b se llaman *límites de integración*, a es el *límite inferior* y b , el *límite superior*. El símbolo $\int$ recibe el nombre de *signo integral*; y la función f , el de *función integrando*.

* * *

Si la función f es continua y no negativa en $[a, b]$, la integral definida de f desde a hasta b es, como hemos visto en la lección anterior, el área de la región del plano limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$:³



* * *

En la definición de integral definida, el límite inferior es menor que el superior ($a < b$). Extendemos el concepto a cualquiera de los casos posibles de la siguiente forma:

a) Si los límites de integración coinciden:

$$\int_a^a f = 0$$

b) Si el límite inferior es mayor que el superior ($a < b$):

$$\int_b^a f = - \int_a^b f$$

¹ Más adelante se definirá el concepto de *integral indefinida*.

² Aunque en el límite de sucesiones no se suele indicar que n tiende a $+\infty$, aquí es conveniente hacerlo para distinguir n , el subíndice del término general, de m , el número de rectángulos cuyas áreas se suman para obtener el valor de dicho término general.

³ En la próxima lección veremos el significado geométrico de la integral definida de una función continua en cualquier caso.

2.- Propiedad de linealidad

Si k es un número real y f y g son funciones continuas en $[a, b]$:

$$\text{a)} \int_a^b (k \cdot f) = k \cdot \int_a^b f$$

$$\text{b)} \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

En efecto:¹

$$\begin{aligned} \text{a)} \int_a^b (k \cdot f) &\stackrel{2}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m (k \cdot f)(c_i) \cdot \Delta x_i \stackrel{3}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m k \cdot f(c_i) \cdot \Delta x_i \stackrel{4}{=} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(k \cdot \sum_{i=1}^m f(c_i) \cdot \Delta x_i \right) \stackrel{5}{=} k \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m f(c_i) \cdot \Delta x_i \stackrel{2}{=} k \cdot \int_a^b f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \int_a^b (f+g) &\stackrel{2}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m (f+g)(c_i) \cdot \Delta x_i \stackrel{6}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m [f(c_i) + g(c_i)] \cdot \Delta x_i = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m [f(c_i) \cdot \Delta x_i + g(c_i) \cdot \Delta x_i] \stackrel{7}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^m f(c_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^m g(c_i) \cdot \Delta x_i \right) \stackrel{5}{=} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m f(c_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m g(c_i) \cdot \Delta x_i \stackrel{2}{=} \int_a^b f + \int_a^b g \end{aligned}$$

* * *

En la propiedad de linealidad, el límite inferior es siempre menor que el superior ($a < b$). Sin embargo, la propiedad es cierta en cualquiera de los casos posibles. Esto es, si k es un número real y f y g son funciones continuas en $[a, b]$, también se verifica:

$$\text{1º)} \int_a^a (k \cdot f) = k \cdot \int_a^a f$$

$$\text{2º)} \int_a^a (f+g) = \int_a^a f + \int_a^a g$$

$$\text{3º)} \int_b^a (k \cdot f) = k \cdot \int_b^a f$$

$$\text{4º)} \int_b^a (f+g) = \int_b^a f + \int_b^a g$$

Las dos primeras fórmulas son evidentes. Para probar las otras dos basta escribir las integrales de manera que el límite inferior sea menor que el superior. Veamos, por ejemplo, la tercera fórmula:

$$\int_b^a (k \cdot f) \stackrel{8}{=} - \int_a^b (k \cdot f) \stackrel{9}{=} -k \cdot \int_a^b f = k \cdot \left(- \int_a^b f \right) \stackrel{8}{=} k \cdot \int_b^a f$$

* * *

¹ Los que no estén acostumbrados al uso de sumatorios pueden sustituir estas demostraciones por las que aparecen en el anexo de esta lección.

² Por la definición de integral definida.

³ Por la definición del producto de un número por una función.

⁴ Sacamos factor común k .

⁵ Por las propiedades de los límites.

⁶ Por la definición de suma de funciones.

⁷ Descomponemos el sumatorio en dos, agrupando por un lado los sumandos que contienen la función f y por el otro los que contienen la función g .

⁸ Por la extensión del concepto de integral vista en el primer apartado de esta lección.

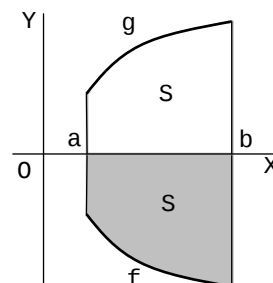
⁹ Por la propiedad de linealidad ya demostrada ($a < b$).

La propiedad de linealidad es cierta también para la resta. Esto es, si f y g son continuas en $[a,b]$:

$$\int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g$$

* * *

La integral definida desde a hasta b de una función f continua y no positiva en $[a,b]$ es igual al área limitada por la grafica de la función f , el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$, pero con signo negativo.



En efecto, si g es la función opuesta de f :

$$\int_a^b f \stackrel{1}{=} \int_a^b (-g) = \int_a^b [(-1) \cdot g] \stackrel{2}{=} (-1) \cdot \int_a^b g = - \int_a^b g \stackrel{3}{=} -S$$

3. - Problemas

1) Si $f_1, f_2, \dots$ y f_n son funciones continuas en $[a,b]$, demuestra por inducción completa la siguiente fórmula:

$$\int_a^b (f_1 + f_2 + \dots + f_n) = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \dots + \int_a^b f_n$$

2) Demuestra las fórmulas 1ª, 2ª y 4ª de la propiedad de linealidad de la integral definida.

3) Si f y g son funciones continuas en $[a,b]$, demuestra las siguientes fórmulas:

$$\text{a)} \int_a^a (f-g) = \int_a^a f - \int_a^a g \quad \text{b)} \int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g \quad \text{c)} \int_b^a (f-g) = \int_b^a f - \int_b^a g$$

4) Expresa mediante una integral definida el área de las siguientes figuras:

- a) Rectángulo de base 7 y altura 3.
- b) Triángulo rectángulo cuyos catetos miden ambos 6.
- c) Triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 7.
- d) Semicircunferencia de radio 2.

5) Calcula las siguientes integrales definidas:

$$\text{a)} \int_2^5 3 \quad \text{b)} \int_0^1 (3+x) \quad \text{c)} \int_0^1 (6e^x)$$

¹ Como f y g son opuestas, $f = -g$.

² Por la primera propiedad de linealidad.

³ Ya que g es una función no negativa. Y como f y g son simétricas respecto del eje de abscisas, el área encerrada por la gráfica de g , el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$ es la misma que la limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$.

6) El área encerrada por la gráfica de la función continua y no negativa f , el eje de abscisas y las rectas $x=2$ y $x=7$ es 12. Si trasladamos verticalmente hacia arriba dos unidades la gráfica de f , ¿cuál será la nueva área? Justifica la respuesta.

7) Si $\int_1^4 f=7$ y $\int_1^4 g=-2$, calcula $\int_1^4 (3f-2g)$.

8) Si k es una constante, halla $\int_a^b k$.

4. - Anexo

Se repiten aquí las demostraciones de las propiedades de linealidad sin usar sumatorios:

$$a) \int_a^b (k \cdot f) \stackrel{1}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} [(k \cdot f)(c_1) \cdot \Delta x_1 + (k \cdot f)(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + (k \cdot f)(c_m) \cdot \Delta x_m] \stackrel{2}{=}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} [k \cdot f(c_1) \cdot \Delta x_1 + k \cdot f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + k \cdot f(c_m) \cdot \Delta x_m] \stackrel{3}{=}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \{k \cdot [f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(c_m) \cdot \Delta x_m]\} \stackrel{4}{=}$$

$$= k \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} [f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(c_m) \cdot \Delta x_m] \stackrel{1}{=} k \cdot \int_a^b f$$

$$b) \int_a^b (f+g) \stackrel{1}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} [(f+g)(c_1) \cdot \Delta x_1 + (f+g)(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + (f+g)(c_m) \cdot \Delta x_m] \stackrel{5}{=}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \{[f(c_1) + g(c_1)] \cdot \Delta x_1 + [f(c_2) + g(c_2)] \cdot \Delta x_2 + \dots + [f(c_m) + g(c_m)] \cdot \Delta x_m\} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} [f(c_1) \cdot \Delta x_1 + g(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + g(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(c_m) \cdot \Delta x_m + g(c_m) \cdot \Delta x_m] \stackrel{6}{=}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} [f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(c_m) \cdot \Delta x_m + g(c_1) \cdot \Delta x_1 + g(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + g(c_m) \cdot \Delta x_m] \stackrel{4}{=}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} [f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(c_m) \cdot \Delta x_m] +$$

$$+ \lim_{n \rightarrow +\infty} [g(c_1) \cdot \Delta x_1 + g(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + g(c_m) \cdot \Delta x_m] \stackrel{1}{=} \int_a^b f + \int_a^b g$$

¹ Por la definición de integral definida.

² Por la definición del producto de un número por una función.

³ Sacamos factor común k .

⁴ Por las propiedades de los límites.

⁵ Por la definición de suma de funciones.

⁶ Agrupamos primero los sumandos que contienen la función f y luego los que contienen la función g .