

Índice: Propiedad de aditividad del intervalo. Propiedad de monotonía. Problemas.

1.- Propiedad de aditividad del intervalo

Si f es una función continua en $[a,b]$ y $c \in [a,b]$, se verifica:

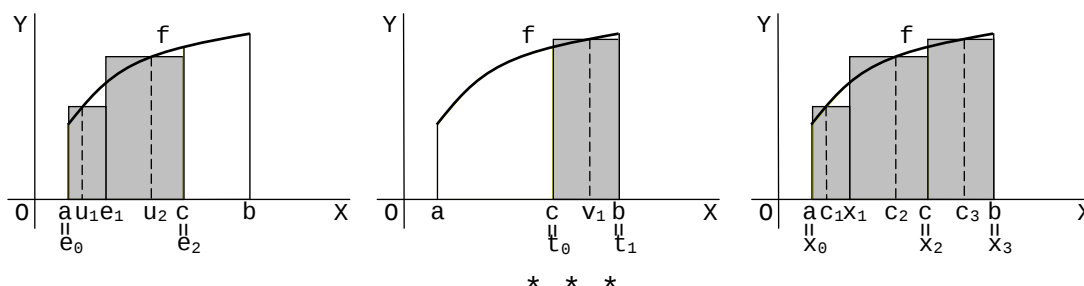
$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \int_a^c f + \int_c^b f &\stackrel{1}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^r f(u_i) \cdot \Delta e_i + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^s f(v_i) \cdot \Delta t_i \stackrel{2}{=} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^r f(u_i) \cdot \Delta e_i + \sum_{i=1}^s f(v_i) \cdot \Delta t_i \right) \stackrel{3}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m f(c_i) \cdot \Delta x_i \stackrel{4}{=} \int_a^b f \end{aligned}$$

NOTA:

Si, por ejemplo, el primer término de la sucesión $\sum_{i=1}^r f(u_i) \cdot \Delta e_i$ está determinado por la partición $P_1 = \{e_0, e_1, e_2\}$ y los puntos u_1 y u_2 ; y el primer término de la sucesión $\sum_{i=1}^s f(v_i) \cdot \Delta t_i$ está determinado por la partición $Q_1 = \{t_0, t_1\}$ y el punto v_1 , entonces el primer término de la sucesión $\sum_{i=1}^m f(c_i) \cdot \Delta x_i$ lo estará por la partición $R_1 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, donde $x_0 = e_0$, $x_1 = e_1$, $x_2 = e_2 = c = t_0$ y $x_3 = t_1$, y los puntos $c_1 = u_1$, $c_2 = u_2$ y $c_3 = v_1$. Y lo mismo sucede con los demás términos de la sucesión:



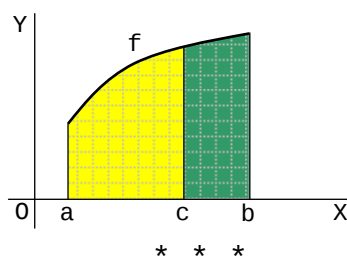
Si la función f es no negativa, la propiedad anterior resulta muy intuitiva. La suma de las dos áreas señaladas es el área total:

¹ $\int_a^c f$ es el límite de una sucesión cuyo término enésimo se obtiene mediante una partición $P_n = \{e_0, e_1, \dots, e_r\}$ del intervalo $[a, c]$ en r partes $(\Delta e_1, \dots, \Delta e_r)$ tal que $\lim |P_n| = 0$ y la elección de r puntos u_i tales que, $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $u_i \in [e_{i-1}, e_i]$. Igualmente, $\int_c^b f$ es el límite de una sucesión cuyo término enésimo queda determinado mediante una partición $Q_n = \{t_0, t_1, \dots, t_s\}$ del intervalo $[c, b]$ en s partes $(\Delta t_1, \dots, \Delta t_s)$ tal que $\lim |Q_n| = 0$ y la elección de s puntos v_i tales que, $\forall i \in \{1, 2, \dots, s\}$, $v_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

² Por las propiedades de los límites.

³ Hacemos un simple cambio de notación: por una parte, $e_i = x_i$ y $u_i = c_i$, $\forall i$; por otra, $t_i = x_{r+i}$ y $v_i = c_{r+i}$, $\forall i$ (evidentemente, $m = r + s$). Este paso se explica en la nota del texto.

⁴ Evidentemente, si $\lim |P_n| = 0$ y $\lim |Q_n| = 0$, entonces $\lim |R_n| = 0$. Por tanto, este último límite es la integral definida desde a hasta b de la función f .



En la propiedad de aditividad del intervalo los límites inferiores son menores que los superiores ($a < c < b$). Sin embargo, la propiedad es cierta en cualquiera de los casos posibles. Esto es, si f es una función continua en $[a, b]$ y $c \in [a, b]$, se verifica:

$$1^{\circ}) \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

$$2^{\circ}) \int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

$$3^{\circ}) \int_b^a f + \int_a^c f = \int_b^c f$$

$$4^{\circ}) \int_b^c f + \int_c^a f = \int_b^a f$$

$$5^{\circ}) \int_c^a f + \int_a^b f = \int_c^b f$$

$$6^{\circ}) \int_c^b f + \int_b^a f = \int_c^a f$$

La primera de estas fórmulas es la que acabamos de demostrar. Para probar las demás, basta utilizar la extensión del concepto de integral definida. Veamos, por ejemplo, la segunda fórmula:

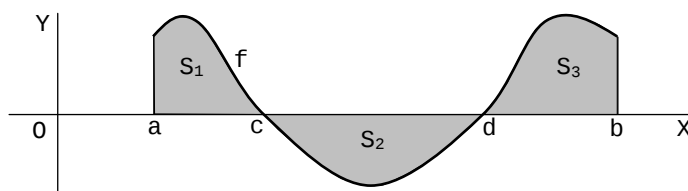
$$\int_a^b f + \int_b^c f \stackrel{1}{=} \int_a^b f - \int_c^b f \stackrel{2}{=} \int_a^c f + \int_c^b f - \int_c^b f = \int_a^c f$$

* * *

El significado geométrico de la integral definida desde a hasta b de una función continua cualquiera es la suma "algebraica" de las áreas de las regiones del plano limitadas por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$, considerando positivas las que se encuentran por encima del eje de abscisas y negativas las que se encuentran por debajo.

Si f es la función que aparece dibujada a continuación, es evidente lo siguiente:

$$\int_a^b f \stackrel{3}{=} \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f \stackrel{4}{=} S_1 - S_2 + S_3$$



¹ Como en la segunda integral el límite inferior es mayor que el superior, cambiamos éstos de posición y a la integral de signo (recuerda la extensión del concepto de integral vista en el primer apartado de la lección anterior).

² Por la primera fórmula, ya demostrada.

³ Por la propiedad de aditividad del intervalo.

⁴ Ya hemos visto el significado geométrico de las integrales de funciones continuas no positivas y no negativas.

2.- Propiedad de monotonía

Si f y g son continuas en $[a,b]$ y $f \leq g$, se verifica:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

En efecto:

$$f \leq g \Rightarrow 0 \leq g-f \xrightarrow{1} 0 \leq \int_a^b (g-f) \xrightarrow{2} 0 \leq \int_a^b g - \int_a^b f \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

3.- Problemas

1) Demuestra las fórmulas 3^a, 4^a, 5^a y 6^a de la propiedad de aditividad del intervalo.

2) ¿Es cierta la propiedad de monotonía en los dos casos siguientes? Justifica la respuesta:

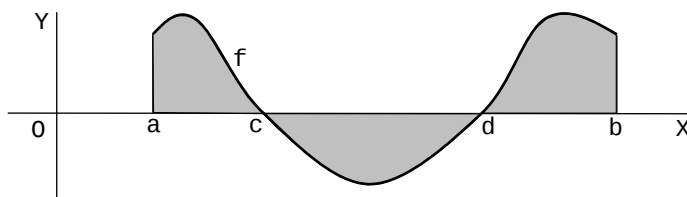
a) Los límites de integración son iguales.

b) El límite inferior es mayor que el superior

3) Si f es continua en $[a,b]$, demuestra la siguiente fórmula:³

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

4) Si tuvieses que plantear mediante integrales definidas el cálculo del área señalada de la siguiente figura, ¿qué fórmulas de las que se indican a continuación te parecen correctas?:



a) $\int_a^b f$

d) $\int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f$

g) $\int_a^c f - \int_c^d f + \int_d^b f$

b) $\int_a^b |f|$

e) $\int_a^c |f| + \int_c^d |f| + \int_d^b |f|$

h) $\int_a^c |f| - \int_c^d |f| + \int_d^b |f|$

c) $\left| \int_a^b f \right|$

f) $\left| \int_a^c f \right| + \left| \int_c^d f \right| + \left| \int_d^b f \right|$

i) $\left| \int_a^c f \right| - \left| \int_c^d f \right| + \left| \int_d^b f \right|$

¹ Como $g-f$ es una función no negativa, $\int_a^b (g-f)$ es el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función $g-f$, el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$. Por tanto, un número no negativo.

² Por la propiedad de linealidad de la integral definida.

³ Probar que $|b| \leq a$ equivale a demostrar que $-a \leq b \leq a$. Tienes, pues, primero que cerciorarte de que $-|f| \leq f \leq |f|$, y aplicar luego la propiedad de monotonía.