

Índice: La integral indefinida. Linealidad de la integral indefinida. Otra notación de la integral. Problemas. Anexo.

1.- La integral indefinida

Se llama *integral indefinida* de f , y se designa $\int f$, al conjunto de sus primitivas.

Ahora bien, si F es una primitiva de f , sabemos que $\{F+C|C\in\mathbb{R}\}$ es el conjunto de todas sus primitivas. Por tanto:¹

$$\int f = F + C$$

El número C se llama *constante de integración*; y como en la integral definida, f es la *función integrando* y $\int$, el *símbolo integral*.

El proceso de cálculo de las primitivas de f –basta calcular una, pues conocida una, se conocen las demás– se llama *integrar f* .

Si no escribimos la constante de integración, es evidente la siguiente equivalencia:

$$\int f = F \Leftrightarrow F' = f$$

Esto nos permite establecer el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Derivar} & \\ F & \xrightarrow{\quad} & f \\ & \xleftarrow{\quad} & \\ & \text{Integrar} & \end{array}$$

Por tanto, derivar e integrar son operaciones recíprocas (salvo la constante de integración), como sumar y restar o multiplicar y dividir.

Consecuencias:

1ª) $\int f' = f$, ya que $f' = f'$.

2ª) $(\int f)' = f$, ya que si $\int f = F + C \Rightarrow (\int f)' = (F + C)' = F' = f$.

2.- Linealidad de la integral indefinida

Si f y g son dos funciones y k es un número real:

a) $\int (k \cdot f) = k \cdot \int f$

b) $\int (f + g) = \int f + \int g$

En efecto:

a) $(k \cdot \int f)' = k \cdot (\int f)' = k \cdot f$

b) $(\int f + \int g)' = (\int f)' + (\int g)' = f + g$

¹ No se escribe el símbolo de conjunto, {...}, aunque se sobrentiende.

* * *

Puede demostrarse igualmente que $\int (f-g) = \int f - \int g$.

3.- Otra notación de la integral

Otra forma de expresar la integral, tanto la definida como la indefinida, es la siguiente:¹

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \qquad \int f(x) \cdot dx$$

Es la más habitual y la que utilizaremos a partir de ahora.

El símbolo que aparece multiplicando a la función integrando, dx , se lee *diferencial de x*. Esta diferencial siempre es la de la variable de la que depende la función integrando. Ahora bien, como es indiferente qué letra se utiliza como variable independiente, en lugar de $\int \sin x \cdot dx$ puede igualmente escribirse $\int \sin t \cdot dt$, $\int \sin u \cdot du$, etc.

Aunque no vamos a estudiar el concepto de diferencial,² es imprescindible conocer la relación que existe entre la diferencial de una función y la de su variable independiente, pues la necesitamos para aplicar el método de integración por sustitución, que veremos más adelante.

Pues bien, la diferencial de una función es igual a su derivada multiplicada por la diferencial de la variable independiente:

$$y=f(x) \Rightarrow dy=f'(x) \cdot dx$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} y &= \sin x \Rightarrow dy = \cos x \cdot dx \\ z &= \arcsin t \Rightarrow dz = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt \\ t &= \sqrt{1-x^2} \Rightarrow dt = \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot dx \Rightarrow dt = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \end{aligned}$$

Observa que este último cálculo se puede simplificar procediendo de la siguiente manera:

$$t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1-x^2 \Rightarrow 2t \cdot dt = -2x \cdot dx \Rightarrow t \cdot dt = -x \cdot dx$$

El resultado, evidentemente, es el mismo, ya que $t = \sqrt{1-x^2}$.

En general:

$$f(x)=g(t) \Rightarrow f'(x) \cdot dx = g'(t) \cdot dt$$

¹ Es la notación de Leibniz.

² Puedes verlo en el anexo de esta lección.

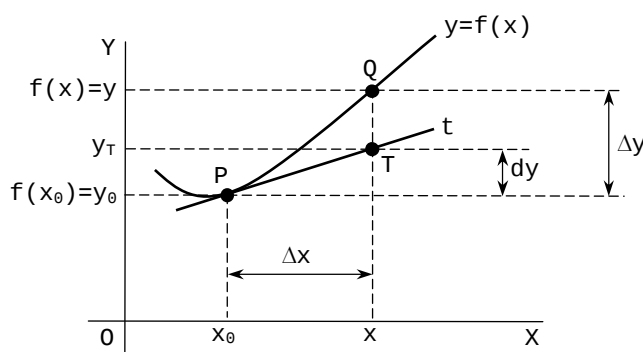
4. - Problemas

- 1) Demuestra que $\int(f-g) = \int f - \int g$
- 2) Halla $f(x)$ si $f(0)=1$, $f'(0)=2$ y $f''(x)=3x$.
- 3) Halla una primitiva de $f(x)=\sin x$ cuya gráfica pase por el punto $(\pi, 0)$.
- 4) Si la gráfica de f pasa por el punto $(0,2)$, es tangente en dicho punto a la recta $6x-2y+4=0$ y $f''(x)=x-3$, calcula f .
- 5) Encuentra la ecuación del movimiento de un punto que se mueve con velocidad constante.
- 6) Encuentra la ecuación del movimiento de un punto que se mueve con aceleración constante.
- 7) Comprueba que:

- a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot dx = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$
- b) $\int \sqrt{x^2+1} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \ln(x+\sqrt{x^2+1})$
- c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot dx = \ln|x+\sqrt{x^2-1}|$
- d) $\int \sqrt{x^2-1} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \cdot \ln|x+\sqrt{x^2-1}|$

5. - Anexo

Consideremos una función, $y=f(x)$, un punto de su gráfica, $P(x_0, y_0)$, y la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto, t . Sean Q y T los puntos de las gráficas de la función y de la tangente, respectivamente, de abscisa común $x=x_0+\Delta x$:



A la variación que se produce en el valor de la ordenada al pasar del punto P al punto Q se la denota, como ya sabemos, por Δy :

$$y = y_0 + \Delta y$$

Pues bien, a la variación que se produce en el valor de la ordenada al pasar del punto P al punto T se la denota por dy :

$$y_T = y_0 + dy$$

Pero como $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ es la ecuación de la recta tangente y el punto T pertenece a dicha recta, resulta lo siguiente:

$$y_T - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \stackrel{1}{\Rightarrow} y_T = y_0 + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

En consecuencia:

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

A dy se le llama *diferencial de la función $y=f(x)$ en x_0* .²

Por ejemplo, la diferencial de la función $y=x^3-2x$ en el punto de abscisa $x=0$ es $dy=-2 \cdot \Delta x$.

* * *

Ahora bien, así como al estudiar las derivadas distinguíamos entre la derivada de una función en un punto, que era un número, y la derivada, que era una función, del mismo modo ocurre con el concepto de diferencial.

Se llama *diferencial de la función $y=f(x)$* , y se denota por dy o $df(x)$, al producto de su derivada por Δx :

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} y &= x^3 - 2x \Rightarrow dy = d(x^3 - 2x) = (3x^2 - 2) \cdot \Delta x \\ y &= x \Rightarrow dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x \end{aligned}$$

Este último resultado, sustituyéndolo en la definición de diferencial de una función, nos conduce a la fórmula que necesitábamos:³

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot dx$$

Y si lo sustituimos en la definición de diferencial de una función en un punto, $dy = f'(x_0) \cdot dx$, permite dar una interpretación geométrica a la notación de la derivada que se utiliza en Física, $dy/dx = f'(x_0)$. Como $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente en x_0 , (dx, dy) es un vector direccional de dicha recta tangente.⁴

¹ Hemos sustituido $f(x_0)$ por y_0 y $x - x_0$ por Δx .

² La diferencial de una función en un punto depende de Δx .

³ Observa que la diferencial de una función depende de x y de Δx , excepto la diferencial de la función x , dx , que solo depende de Δx . Más aún, coincide con Δx .

⁴ Recuerda que la pendiente de una recta se obtiene dividiendo la segunda coordenada del vector direccional entre la primera.