Índice: Primitivas de una función. Regla de Barrow. Problemas. Anexo.

1.- Primitivas de una función

La función *F es una primitiva de la función f* si $F'=f$.

Por ejemplo, x es una primitiva de 1, x^2 es una primitiva de $2x$, x^3+8 es una primitiva de $3x^2$, $\operatorname{sen} x$ es una primitiva de $\cos x$, etc.

* * *

Por el teorema fundamental del cálculo integral sabemos que toda función continua tiene una primitiva,[1] pero no siempre ésta es elemental (no siempre puede expresarse mediante las funciones que conocemos).

Por ejemplo, la función $f(x)=e^x/x$ no tiene una primitiva elemental.

* * *

Si F es una primitiva de f, $\{F+C|C\in R\}$ es el conjunto de todas las primitivas de f.

En efecto:

- Si G es una función perteneciente a dicho conjunto, entonces es una primitiva de f:

$$G\in\{F+C|C\in R\} \overset{2}{\Rightarrow} G=F+k \Rightarrow G'=(F+k)'=F' \overset{3}{=} f$$

- Si G es una primitiva de f, entonces $G\in\{F+C|C\in R\}$:

$$G'=f \Rightarrow G' \overset{3}{=} F' \Rightarrow G'-F'=0 \Rightarrow (G-F)'=0 \overset{4}{\Rightarrow} G-F=k \Rightarrow G=F+k$$

Por ejemplo, $\{x+C|C\in R\}$ es el conjunto de todas las primitivas de la función constante 1.

2.- Regla de Barrow

Si f es continua en $[a,b]$ y F es una primitiva suya, entonces:

$$\int_a^b f=F(b)-F(a)$$

En efecto, como F es una primitiva de f, $\{F+C|C\in R\}$ es el conjunto de todas las primitivas de f. Ahora bien, por el teorema fundamental

[1] Si f es continua en $[a,b]$, $S(x)=\int_a^b f$ es una primitiva suya en $[a,b]$.

[2] Si G pertenece a ese conjunto, existirá un número real k tal que $G=F+k$.

[3] Ya que F es una primitiva de f.

[4] Es una consecuencia del teorema del valor medio del cálculo diferencial (ver anexo).

del cálculo integral sabemos que la función $S(x)=\int_a^x f$ es también una primitiva de f. En consecuencia, $S(x)=F(x)+k$, donde k es una constante.

Sustituyendo x por a y por b, queda:

$$S(a)=F(a)+k \Rightarrow \int_a^a f=F(a)+k \Rightarrow 0=F(a)+k \Rightarrow k=-F(a)$$

$$S(b)=F(b)+k \Rightarrow \int_a^b f=F(b)+k$$

Por tanto:

$$\int_a^b f=F(b)-F(a)$$

* * *

Como veremos en los problemas, es práctico escribir:

$$\int_a^b f=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

* * *

En resumen, hemos reducido el cálculo de integrales al cálculo de primitivas.

3.- Problemas

1) Mediante la regla de Barrow, encuentra la derivada de la función $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)$.

2) Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) $F(x)=\int_{\ln x}^{-x} t^2e^t$ **b)** $F(x)=\int_2^{x^2} \ln t$

3) Calcula los puntos singulares de la función $F(x)=\int_{-3}^{x^3-12x} e^t$.

4) Mediante una integral definida escribe una primitiva F(x) de la función $f(x)=4x^3-2x$ que cumpla $F(3)=0$.

5) Si una función es negativa, sus primitivas son funciones decrecientes. ¿Por qué?

6) Comprueba que $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ y $g(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}$ son primitivas de la misma función. ¿De qué función se trata? Calcula la constante que relaciona f y g.

7) Las funciones $f(x)=-\operatorname{arc\,sen} x$ y $g(x)=\operatorname{arc\,cos} x$ se diferencian en una constante. ¿Por qué? ¿Qué constante es ésa?

8) Prueba sin derivar que las funciones $f(x)=\frac{1}{1+x^4}$ y $g(x)=\frac{-x^4}{1+x^4}$ son primitivas de la misma función.

4.- Anexo

Si H es una función derivable en el intervalo I y su derivada vale cero, entonces H es constante en dicho intervalo.

Para demostrar que la función H es constante, vamos a probar que, si a y b son dos puntos cualesquiera de I (a<b), entonces H(a)=H(b).

Como la función H cumple las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo [a,b], existe c en (a,b) tal que

$$H'(c) = \frac{H(b)-H(a)}{b-a}$$

Pero como H'(c)=0, resulta que H(a)=H(b).