JUNIO DE 2014. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases}(a-1)x+(a+2)y=5\\(1-a)x+(-1-a)y+2z=-4\\y+(a^2+a)z=2-a\end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a-1 & a+2 & 0 & 5\\1-a & -1-a & 2 & -4\\0 & 1 & a^2+a & 2-a\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}a-1 & a+2 & 0 & 5\\0 & 1 & 2 & 1\\0 & 1 & a^2+a & 2-a\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{a-1} & a+2 & 0 & 5\\0 & \mathbf{1} & 2 & 1\\0 & 0 & \mathbf{a^2+a-2} & 1-a\end{array}\right)\overset{3}{\to}$$

$$\to\begin{cases}a-1=0 \Rightarrow a=1\\a^2+a-2=0 \Rightarrow a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm3}{2} \Rightarrow a=-2,\ a=1\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-2, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-3 & 0 & 0 & 5\\0 & 1 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 3\end{array}\right)$$

2º) Si a=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:[4]

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 3 & 0 & 5\\0 & 1 & 2 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 2 & 1\\0 & 3 & 0 & 5\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{6}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 2 & 1\\0 & 0 & -6 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to$$

$$\to\begin{cases}y+2z=1\\-6z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1-2z\\z=-1/3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=5/3\\z=-1/3\end{cases}$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r}(a-1)x+(a+2)y=5\\y+2z=1\\(a-1)(a+2)z=-(a-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{z=\frac{-1}{a+2}}\Rightarrow y=1-2z=1+\frac{2}{a+2}\Rightarrow\boxed{y=\frac{a+4}{a+2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-1)x=5-(a+2)y=5-(a+2)\cdot\frac{a+4}{a+2}=5-a-4=1-a=-(a-1)\Rightarrow\boxed{x=-1}$$

---

1 2ªf+1ªf.

2 3ªf-2ªf.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

4 Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.

5 1ªf↔2ªf.

6 2ªf-3·1ªf.

JUNIO DE 2014. PROBLEMA A2.

Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto P(2,3,-1) y es paralela a los planos $\pi_1 \equiv 2x-y+3z-1=0$ y $\pi_2 \equiv x+y-2z+3=0$.
Encuentra el punto $Q \in r$ que está en el plano x=0. (2 PUNTOS)

a) Como el plano π_1 es paralelo a la recta r, el vector característico del plano, $\vec{u}(2,-1,3)$, es perpendicular a la recta.

Como el plano π_2 es paralelo a la recta r, el vector característico del plano, $\vec{v}(1,1,-2)$, es perpendicular a la recta.

Por tanto, un vector direccional de la recta r es:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$$

Como la recta r pasa por el punto P(2,3,-1), su ecuación continua es:[1]

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{7} = \frac{z+1}{3}$$

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{7} = \frac{z+1}{3} = \alpha \Rightarrow \begin{cases} x=2-\alpha \\ y=3+7\alpha \\ z=-1+3\alpha \end{cases}$$

Por tanto, como Q es un punto de la recta r, $Q(2-\alpha, 3+7\alpha, -1+3\alpha)$. Y como está en el plano x=0, satisface su ecuación:

$$2-\alpha=0 \Rightarrow \alpha=2 \Rightarrow Q(0,17,5)$$

[1] Otras formas de hacer este problema pueden verse, por ejemplo, en el ejercicio 8 del Examen Final del curso 2007-2008, en *Exámenes*, en este mismo *blog*.

JUNIO DE 2014. PROBLEMA A3.

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{dx}{x^2-x} \qquad \int x\cdot sen(2x)\cdot dx \qquad \text{(2 PUNTOS)}$$

a) Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0,\ x=1$$

Por tanto:[1]

$$\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=A(x-1)+Bx \Rightarrow \begin{cases} Si\ x=0 \Rightarrow 1=-A \Rightarrow A=-1 \\ Si\ x=1 \Rightarrow 1=B \Rightarrow B=1 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{1}{x^2-x}\cdot dx=\int \frac{-1}{x}\cdot dx+\int \frac{1}{x-1}\cdot dx=-\int \frac{1}{x}\cdot dx+\int \frac{1}{x-1}\cdot dx \stackrel{2}{=} -\ln|x|+\ln|x-1|+C$$

Comprobación:

$$(-\ln|x|+\ln|x-1|)'=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{-(x-1)+x}{x(x-1)}=\frac{-x+1+x}{x^2-x}=\frac{1}{x^2-x}$$

b)

$$\int x\cdot sen(2x)\cdot dx \stackrel{3}{=} -\frac{1}{2}\cdot x\cdot \cos(2x)+\frac{1}{4}\cdot sen(2x)+C$$

S	D	I
+	x	sen(2x)
-	1	$-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)$
+	0	$-\frac{1}{4}\cdot sen(2x)$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1}{2}\cdot x\cdot\cos(2x)+\frac{1}{4}\cdot sen(2x)\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)-\frac{1}{2}\cdot x\cdot[-sen(2x)]\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot\cos(2x)\cdot 2=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)+x\cdot sen(2x)+\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)=x\cdot sen(2x)$$

---

1 Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

2 Se trata de integrales de tipo logaritmo, la primera inmediata y la segunda casi inmediata. Si se desea, puede simplificarse el resultado final agrupando los sumandos mediante las propiedades de los logaritmos

3 Esta integral se hace por partes. Las integrales efectuadas en la columna I son casi inmediatas de tipo seno y coseno. Se puede simplificar el cálculo de estas integrales si antes de aplicar el método de integración por partes se hace el cambio de variable 2x=t.

JUNIO DE 2014. PROBLEMA A4.

Dada la función f(x) demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso:

$$f(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6x}\right)+\frac{2}{\sqrt{17-2x-3x^2}}$$

Ayuda: $\operatorname{tg}(\pi/4)=1$, $\operatorname{tg}(\pi/6)=1/\sqrt{3}$. (3 PUNTOS)

Derivamos la función:

$$f'(x)=\frac{-6\pi}{36x^2}\cdot\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6x}\right)\right]+\frac{-2\cdot\dfrac{-2-6x}{2\cdot\sqrt{17-2x-3x^2}}}{17-2x-3x^2}=$$

$$=\frac{-\pi}{6x^2}\cdot\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6x}\right)\right]+\frac{2+6x}{(17-2x-3x^2)\cdot\sqrt{17-2x-3x^2}}$$

Por tanto, Dom(f)=Dom(f'). Se trata del intervalo (-2,73…;2,07…), excepto $x=0$ y $x=2/(5+12k)$, con $k\in Z$. En efecto:[1]

$$3x^2+2x-17=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+204}}{6}=\frac{-2\pm4\sqrt{13}}{6}=\frac{-1\pm2\sqrt{13}}{3} \Rightarrow \begin{cases}x=-2,73\ldots\\ x=2,07\ldots\end{cases}$$

$$\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6x}=\frac{\pi}{2}+k\pi \overset{2}{\Rightarrow} x+2=6x+12kx \Rightarrow 2=(5+12k)x \Rightarrow x=\frac{2}{5+12k}$$

Como el mayor de estos valores, que se obtiene para k=0, es 2/5, resulta que $[1,2]\subset(2/5;2,07\ldots)\subset\mathrm{Dom}(f')=\mathrm{Dom}(f)$.

* * *

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange,[3] existe α en el intervalo abierto (1,2) tal que:[4]

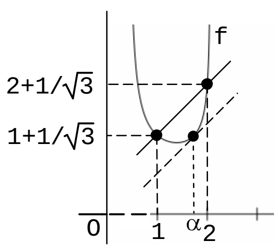
$$f'(\alpha)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{2}{1}\right]-\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{2}{\sqrt{12}}\right]=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+2-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\frac{2}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}+2-1-\frac{1}{\sqrt{3}}=1$$

En efecto:

1ª) f es continua en el cerrado [1,2] por ser derivable en Dom(f).

2ª) f es derivable en el abierto (1,2) por serlo en Dom(f).



[1] El radicando debe ser positivo, x debe ser distinto de 0 y el ángulo debe pertenecer al dominio de la tangente.

[2] Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por $12x/\pi$.

[3] También podría hacerse el problema probando que la función f' cumple las condiciones de la propiedad de Darboux o que la función $g(x)=f'(x)-1$ cumple las del teorema de Bolzano o que la función $g(x)=f(x)-x$ cumple las del teorema de Rolle.

[4] Este cálculo es el que habría que hacer en primer lugar para ver si se puede o no aplicar el teorema de Lagrange.

JUNIO DE 2014. PROBLEMA B1.

Dada la matriz A, encuentra todas las matrices B que cumplen ABA=A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Evidentemente, B es una matriz de orden 3×2:

$$B=\begin{pmatrix}x & u\\ y & v\\ z & w\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$ABA=B \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & u\\ y & v\\ z & w\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x-y & u-v\\ z & w\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x-y & y-x & u-v\\ z & -z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x-y=1\\ y-x=-1\\ u-v=0\\ z=0\\ -z=0\\ w=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1+y\\ u=v\\ z=0\\ w=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1+\alpha\\ y=\alpha\\ z=0\\ u=\beta\\ v=\beta\\ w=1\end{cases} \Rightarrow B=\begin{pmatrix}1+\alpha & \beta\\ \alpha & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

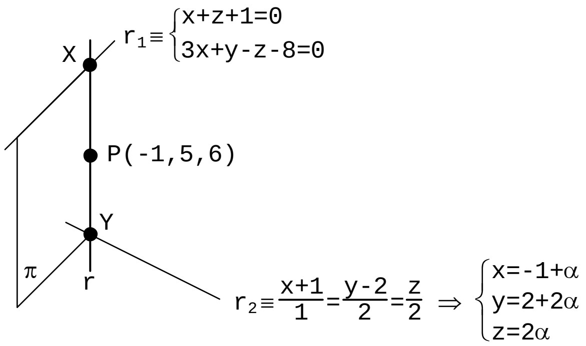
JUNIO DE 2014. PROBLEMA B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto P(-1,5,6) y corta a las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x+z+1=0 \\ 3x+y-z-8=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$$

(3 PUNTOS)

Sean X e Y los puntos de corte de la recta r con r_1 y r_2, respectivamente:[1]



El punto P y la recta r_1 determinan el plano π. Como este plano pertenece al haz de planos de arista la recta r_1, tiene por ecuación:[2]

$$\pi \equiv a(x+z+1)+b(3x+y-z-8)=0$$

Como el punto P(-1,5,6) está en el plano π, satisface su ecuación:

$$a(-1+6+1)+b(-3+5-6-8)=0 \Rightarrow 6a-12b=0 \Rightarrow a=2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b(x+z+1)+b(3x+y-z-8)=0 \Rightarrow b(2x+2z+2+3x+y-z-8)=0 \overset{3}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 5x+y+z-6=0$$

Como el punto Y está en la recta r_2:

$$Y(-1+\alpha,2+2\alpha,2\alpha)$$

Como el punto Y está en el plano π, satisface su ecuación:

$$5(-1+\alpha)+2+2\alpha+2\alpha-6=0 \Rightarrow -5+5\alpha+2+2\alpha+2\alpha-6=0 \Rightarrow 9\alpha=9 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(0,4,2) \Rightarrow [\overrightarrow{PY}]=(1,-1,-4) \Rightarrow r \equiv \frac{x+1}{1}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-6}{-4}$$

---

[1] Otras formas de hacer este ejercicio pueden verse, por ejemplo, en el problema B2 del examen de selectividad de junio de 2007.

[2] Otra forma de obtener la ecuación de este plano consiste en hallar un punto y un vector direccional de la recta r_1.

[3] Ya que $b\neq0$. Si $b=0$, entonces $a=0$; pero a y b no pueden ser simultáneamente nulos.

JUNIO DE 2014. PROBLEMA B3.

Dada la función f(x), demuestra que existe un valor $\alpha\in(-2,1)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso:

$$f(x)=\frac{\cos(x^3+2x^2+3x)}{\sqrt{x^2+x+2}}$$

(2 PUNTOS)

El dominio de la función f es R:

$$x^2+x+2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2}$$

Derivamos la función f:

$$f'(x)=\frac{-(3x^2+4x+3)\operatorname{sen}(x^3+2x^2+3x)\cdot\sqrt{x^2+x+2}-\cos(x^3+2x^2+3x)\cdot\frac{2x+1}{2\cdot\sqrt{x^2+x+2}}}{x^2+x+2}=$$

$$=\frac{-2(3x^2+4x+3)(x^2+x+2)\operatorname{sen}(x^3+2x^2+3x)-(2x+1)\cdot\cos(x^3+2x^2+3x)}{2\cdot(x^2+x+2)\cdot\sqrt{x^2+x+2}}$$

Por tanto, Dom(f')=Dom(f)=R.

* * *

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Rolle,[1] existe α en (-2,1) tal que $f'(\alpha)=0$.

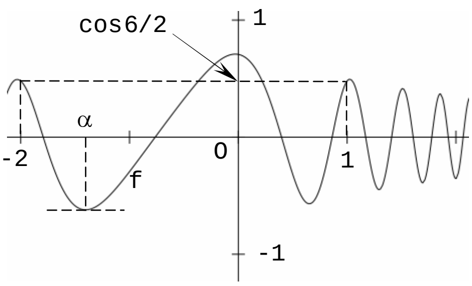
En efecto:

1ª) f(-2)=f(1):

- $f(-2)=\frac{\cos(-8+8-6)}{\sqrt{4-2+2}}=\frac{\cos(-6)}{2}=\frac{\cos 6}{2}$
- $f(1)=\frac{\cos(1+2+3)}{\sqrt{1+1+2}}=\frac{\cos 6}{2}$

2ª) f es continua en [-2,1] por ser derivable en R.

3ª) f es derivable en (-2,1) por serlo en R.



[1] También podría hacerse el problema probando que la función f' cumple las condiciones del teorema de Bolzano.

JUNIO DE 2014. PROBLEMA B4.

Dada la función f(x), encuentra los dos puntos en que corta al eje de abscisas. Calcula el área de cada una de las dos regiones en que divide esa curva al círculo de centro (0,0) y radio 2:

$$f(x)=1-\frac{1}{4}\cdot x^2 \qquad \text{(3 PUNTOS)}$$

1º) Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función y el eje de abscisas:

$$\begin{cases} y=1-x^2/4 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 1-\frac{x^2}{4}=0 \Rightarrow \frac{x^2}{4}=1 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

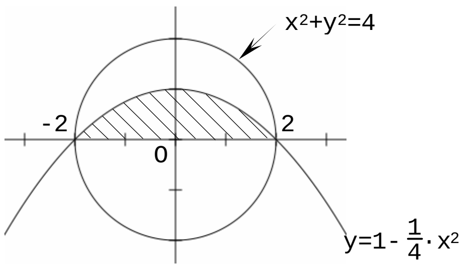
2º) Como los puntos de corte de la parábola y el círculo son los mismos, calculamos el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje de abscisas:[1]

$$A=\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{1}{4}\cdot x^2\right)\cdot dx \overset{2}{=} \left[x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2}=$$

$$=\left(2-\frac{8}{12}\right)-\left(-2+\frac{8}{12}\right)=\left(2-\frac{2}{3}\right)+\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}$$

3º) Como el área del círculo es 4π, las áreas de las dos regiones son las siguientes:

$$A_1=2\pi-\frac{8}{3} \qquad\qquad A_2=2\pi+\frac{8}{3}$$



[1] Si se observa la simetría, puede reducirse el cálculo a la integral entre 0 y 2, multiplicando luego por 2 el resultado.

[2] Como el cálculo de una primitiva es trivial, lo hacemos directamente.