EXTRAORDINARIO DE 2015. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} ax+y-z=2 \\ 2ax+(a^2+1)y+(a-1)z=a+5 \\ ax+a^2y+(a-2)z=a+5 \end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 2 \\ 2a & a^2+1 & a-1 & a+5 \\ a & a^2 & a-2 & a+5 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 2 \\ 0 & a^2-1 & a+1 & a+1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & a+3 \end{array}\right) \overset{2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{a} & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{a^2-1} & a+1 & a+1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & 2 \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow} \begin{cases} a=0 \\ a^2-1=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} -x+y-z=2 \\ -2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2+x+z=2+x-1 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=-1 \end{cases}$$

2º) Si a=0, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

3º) Si a=1, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 2 \\ 0 & a^2-1 & a+1 & a+1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \overset{6}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 2 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} ax+y-z=2 \\ (a-1)y+z=1 \\ z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=-1} \Rightarrow (a-1)y=1-z=2 \Rightarrow \boxed{y=\frac{2}{a-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax=2-y+z=2-\frac{2}{a-1}-1=1-\frac{2}{a-1}=\frac{a-1-2}{a-1}=\frac{a-3}{a-1} \Rightarrow \boxed{x=\frac{a-3}{a^2-a}}$$

---

1 $2^a f - 2\cdot 1^a f$; $3^a f - 1^a f$.

2 $3^a f - 2^a f$.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).

4 $2^a f + 1^a f$; $3^a f \cdot 1/2$.

5 $3^a f + 2^a f$.

6 $2^a f \cdot 1/(a+1)$; $3^a f \cdot (-1/2)$.

Extraordinario de 2015. Problema A2.

Halla los dos puntos de la recta r que están a distancia $\sqrt{17}$ del punto P(1,-1,4):

$$r\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-3}{1}$$

(2 Puntos)

Calculamos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-3}{1}=a \Rightarrow \begin{cases} x=2+3a \\ y=-2a \\ z=3+a \end{cases}$$

Si X es un punto de la recta r, entonces X(2+3a,-2a,3+a).

Por tanto:

$$d(P,X)=\sqrt{17} \Rightarrow \sqrt{(2+3a-1)^2+(-2a+1)^2+(3+a-4)^2}=\sqrt{17} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+3a)^2+(1-2a)^2+(a-1)^2=17 \Rightarrow 1+6a+9a^2+1-4a+4a^2+a^2-2a+1=17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14a^2=14 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} X(-1,2,2) \\ X(5,-2,4) \end{cases}$$

EXTRAORDINARIO DE 2015. PROBLEMA A3.

Dada la función $f(x)=x\cdot(\sqrt{2x^2+3x+2})^{\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)}$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(0,2)$ tal que $f'(\alpha)=1/4$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2 PUNTOS)

Como la ecuación $2x^2+3x+2=0$ no tiene solución, $2x^2+3x+2$ es siempre positivo[1]. Por tanto, Dom(f)=R.

Si designamos al segundo factor de la función f por g, tenemos lo siguiente:

$$f(x)=x\cdot g(x) \Rightarrow f'(x)=g(x)+x\cdot g'(x)$$

Como g es una función potencial-exponencial, puede escribirse como una función exponencial:

$$g(x)=(\sqrt{2x^2+3x+2})^{\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)}=e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\ln(2x^2+3x+2)^{1/2}} \overset{2}{=} e^{\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\ln(2x^2+3x+2)}$$

Por tanto:

$$g'(x)=g(x)\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\ln(2x^2+3x+2)\right]'=$$

$$=g(x)\cdot\left[-\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\ln(2x^2+3x+2)+\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\frac{4x+3}{2x^2+3x+2}\right]$$

Evidentemente, Dom(f')=R.

* * *

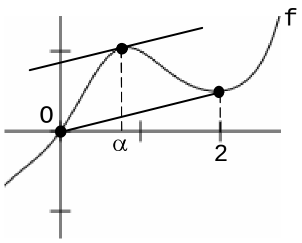
Como la función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange[3] en el intervalo [0,2], existe α en (0,2) tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{2\cdot 4^{-1}-0}{2}=\frac{2\cdot 1/4}{2}=\frac{1}{4}$$

En efecto:

1ª) f es continua en [0,2] por ser derivable en R.

2ª) f es derivable en (0,2) por serlo en R.



[1] Ya que al sustituir la x por un valor cualquiera sale positivo.
[2] Por las propiedades de los logaritmos.
[3] También podría hacerse el problema probando que la función f' cumple las condiciones de la propiedad de Darboux o que la función $g(x)=f'(x)-1/4$ cumple las del teorema de Bolzano o que la función $g(x)=f(x)-x/4$ cumple las del teorema de Rolle.

EXTRAORDINARIO DE 2015. PROBLEMA A4.

Dadas las funciones $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$ y $g(x)=1-x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 PUNTOS)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo la región cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right) \\ y=1-x \end{cases} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)=1-x \overset{[1]}{\Rightarrow} \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre 0 y 1 y entre 1 y 2 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	f(x)	g(x)
1/2	$\sqrt{2}/2=0,7\ldots$	1/2=0,5
3/2	$-\sqrt{2}/2=-0,7\ldots$	-1/2=-0,5

3º) Calculamos el área:

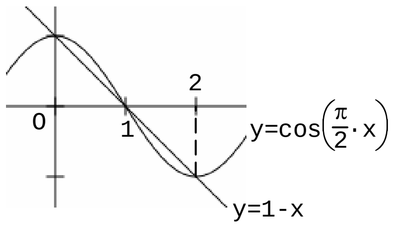
$$A=\int_0^1\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-1+x\right]\cdot dx+\int_1^2\left[1-x-\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]\cdot dx=$$

$$=\int_0^1\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-1+x\right]\cdot dx-\int_1^2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-1+x\right]\cdot dx \overset{[2]}{=}$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-x+\frac{x^2}{2}\right)_0^1-\left(\frac{2}{\pi}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-x+\frac{x^2}{2}\right)_1^2=$$

$$=\left[\left(\frac{2}{\pi}\cdot 1-1+\frac{1}{2}\right)-0\right]-\left[\left(\frac{2}{\pi}\cdot 0-2+2\right)-\left(\frac{2}{\pi}\cdot 1-1+\frac{1}{2}\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{\pi}-1=\frac{4-\pi}{\pi}$$



[1] Esta ecuación se resuelve a ojo.

[2] Calculamos la correspondiente integral indefinida directamente. La integral del primer sumando es casi inmediata de tipo seno y la de los dos últimos sumandos, inmediata de tipo potencial.

EXTRAORDINARIO DE 2015. PROBLEMA B1.

Dadas las matrices A y B, halla la matriz X que cumple A·X=B:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

(2 puntos)

PRIMER MÉTODO:

Aplicamos el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2\end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{cc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2\end{array}\right) \Rightarrow X=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

SEGUNDO MÉTODO:

$$A\cdot X=B \overset{2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & z & u\\ y & t & v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x & z & u\\ -x+y & -z+t & -u+v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\ -x+y=0\\ z=1\\ -z+t=1\\ u=0\\ -u+v=2\end{cases} \overset{3}{\Rightarrow} \begin{cases}x=2\\ y=2\\ z=1\\ t=2\\ u=0\\ v=2\end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

* * *

Comprobación:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0 & 1+0 & 0+0\\ -2+2 & -1+2 & 0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=B$$

---

1 2ªf+1ªf.

2 Como A es una matriz de orden 2×2 y B es de orden 2×3, X es de orden 2×3.

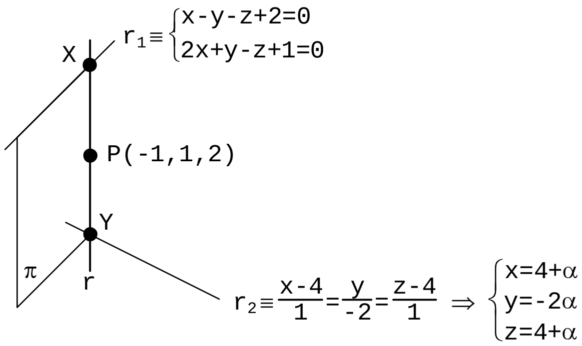
3 Observa que este sistema de seis ecuaciones y seis incógnitas está compuesto a su vez de tres sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas cada uno: el primero formado por las dos primeras ecuaciones, el segundo formado por las ecuaciones tercera y cuarta y el tercero, por las dos últimas; y que, como los tres tienen la misma matriz de coeficientes, pueden resolverse conjuntamente por Gauss-Jordan, que es lo que hemos hecho en el primer método.

EXTRAORDINARIO DE 2015. PROBLEMA B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto P(-1,1,2) y corta a las rectas

$r_1 \equiv \begin{cases} x-y-z+2=0 \\ 2x+y-z+1=0 \end{cases}$ $\qquad r_2 \equiv \frac{x-4}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-4}{1}$ $\qquad$ (3 PUNTOS)

Sean X e Y los puntos de corte de la recta r con r_1 y r_2, respectivamente:[1]



El punto P y la recta r_1 determinan el plano π. Como este plano pertenece al haz de planos de arista la recta r_1, tiene por ecuación:[2]

$$\pi \equiv a(x-y-z+2)+b(2x+y-z+1)=0$$

Como el punto P(-1,1,2) está en el plano π, satisface su ecuación:

$$a(-1-1-2+2)+b(-2+1-2+1)=0 \Rightarrow -2a-2b=0 \Rightarrow b=-a$$

Por tanto:

$$a(x-y-z+2)-a(2x+y-z+1)=0 \Rightarrow a(x-y-z+2-2x-y+z-1)=0 \overset{3}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -x-2y+1=0 \Rightarrow \pi \equiv x+2y-1=0$$

Como el punto Y está en la recta r_2:

$$Y(4+\alpha,-2\alpha,4+\alpha)$$

Como el punto Y está en el plano π, satisface su ecuación:

$$4+\alpha-4\alpha-1=0 \Rightarrow -3\alpha+3=0 \Rightarrow 3\alpha=3 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(5,-2,5) \Rightarrow [\overrightarrow{PY}]=(6,-3,3)=3\cdot(2,-1,1) \Rightarrow r \equiv \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}$$

[1] Otras formas de hacer este ejercicio pueden verse, por ejemplo, en el problema B2 del examen de selectividad de junio de 2007.

[2] Otra forma de obtener la ecuación de este plano consiste en hallar un punto y un vector direccional de la recta r_1.

[3] Ya que $a\neq 0$. Si $a=0$, entonces $b=0$; pero a y b no pueden ser simultáneamente nulos.

EXTRAORDINARIO DE 2015. PROBLEMA B3.

Calcula los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\operatorname{sen}x} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+1}$$ (2 PUNTOS)

PRIMER LÍMITE:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\operatorname{sen}x} \overset{1}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \overset{2}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{2}{2}=1$$

SEGUNDO LÍMITE:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+1} \overset{3}{=} e^{\lim_{x\to +\infty}\left[(x+1)\cdot\left(\frac{x+1}{x+3}-1\right)\right]}=$$

$$=e^{\lim_{x\to +\infty}\left[(x+1)\cdot\frac{x+1-x-3}{x+3}\right]}=e^{\lim_{x\to +\infty}\left[(x+1)\cdot\frac{-2}{x+3}\right]}=$$

$$=e^{\lim_{x\to +\infty}\frac{-2x-2}{x+3}} \overset{4}{=} e^{\lim_{x\to +\infty}\frac{-2x}{x}}=e^{\lim_{x\to +\infty}(-2)}=e^{-2}$$

---

1 Ya que $\operatorname{sen}x \sim x$ en 0. Otra forma más rapida de hacer este límite es por L'Hôpital.

2 Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador. También aquí es más rápido aplicar L'Hôpital.

3 Ya que sale la indeterminación $1^{+\infty}$.

4 Ya que $-2x-2 \sim -2x$ y $x+3 \sim x$ en $+\infty$.

Extraordinario de 2014. Problema B4.

Comprueba que la siguiente función está definida y es continua en todo R. Encuentra sus extremos relativos y absolutos en el intervalo [-1,3]:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2 & \text{si } x\le 2 \\ 6-2x & \text{si } x>2 \end{cases}$$

(3 Puntos)

1º) La función es continua en Dom(f)=R:

Si $x<2 \Rightarrow f'(x)=2x-2 \overset{1}{\Rightarrow}$ f es continua en $(-\infty,2)$.

Si $x>2 \Rightarrow f'(x)=-2 \overset{1}{\Rightarrow}$ f es continua en $(2,+\infty)$.

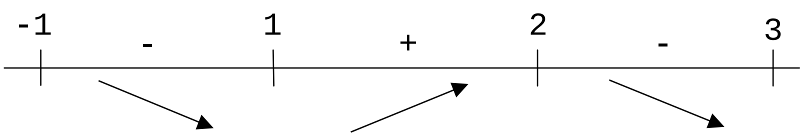
La función es continua en x=2:

- $f(2)=4-4+2=2$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(x^2-2x+2)=4-4+2=2$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(6-2x)=6-4=2$

2º) Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, calculamos los posibles extremos relativos:

- Si $-1<x<2$: $f'(x)=0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$.
- Si $2<x<3$: $f'(x)=0 \Rightarrow -2=0 \Rightarrow$ No hay extremos relativos.

Estudiamos el signo de f' en el intervalo:



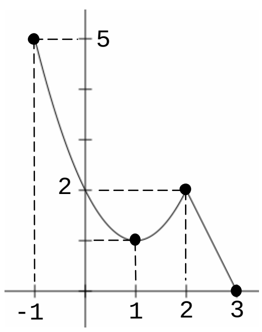
Como f es continua en x=1 y x=2, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera f tiene un mínimo relativo en x=1, que vale y=1-2+2=1, y un máximo relativo en x=2, que vale y=2.

3º) Calculamos los valores de f en los extremos del intervalo:

$$f(-1)=1+2+2=5$$

$$f(3)=6-6=0$$

Por tanto, la función f tiene un máximo absoluto en x=-1, que vale y=5, y un mínimo absoluto en x=3, que vale y=0:



[1] Si una función es derivable en un punto, es continua en dicho punto.