Índice: La ecuación matricial A·X=I. Cálculo de la matriz inversa. Caracterización de las matrices invertibles. Problemas.

1.- La ecuación matricial A·X=I

Es fácil ver que si A es una matriz cuadrada de orden n e I es la matriz unidad del mismo orden, entonces rg(A|I)=n. La razón es que se pueden hacer 0 todos los elementos de la matriz A mediante transformaciones elementales de columnas.

Por ejemplo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}5&-3&1&0\\2&1&0&1\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}0&0&1&0\\2&1&0&1\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{rg}\left(\begin{array}{cc|cc}5&-3&1&0\\2&1&0&1\end{array}\right)=2$$

* * *

Al resolver por el método de Gauss-Jordan la ecuación matricial A·X=I, donde A y X son matrices cuadradas de orden n e I es la matriz unidad del mismo orden, sólo pueden presentarse dos casos, ya que, como acabamos de ver, rg(A|I)=n:[4]

1º) rg(A)=rg(A|I)=n

2º) rg(A)≠rg(A|I)=n

En el primer caso, la ecuación A·X=I es compatible determinada; y en el segundo, incompatible.

2.- Cálculo de la matriz inversa

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n e I, la matriz unidad del mismo orden. Si mediante transformaciones elementales de filas se puede pasar de la matriz (A|I) a la matriz (I|B), también se podrá pasar de la matriz (B|I) a la matriz (I|A).

Veámoslo con un ejemplo:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}0&-2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}3&4&0&1\\0&-2&1&0\end{array}\right)\overset{6}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}3&0&2&1\\0&-2&1&0\end{array}\right)\overset{7}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2/3&1/3\\0&1&-1/2&0\end{array}\right)=(I|B)$$

Si invertimos esta cadena de equivalencias aplicando en cada paso la correspondiente transformación elemental recíproca,[8] tenemos:

---

[1] 1ªc-5·3ªc; 2ªc+3·3ªc.
[2] 1ªc-2·4ªc; 2ªc-4ªc.
[3] Eliminamos las dos primeras columnas.
[4] Como rg(A|I)=n, evidentemente no puede darse el caso de que rg(A)=rg(A|I)=r<n, esto es, la ecuación A·X=I no puede ser compatible indeterminada. Ver la conclusión del apartado 2 de la lección SM-12.
[5] 1ªf↔2ªf.
[6] 1ªf+2·2ªf.
[7] 1ªf·1/3; 2ªf·(-1/2).
[8] Recuerda que las transformaciones elementales son reversibles.

$$(B|I)=\left(\begin{array}{cc|cc} 2/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)=(I|A)$$

* * *

Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n e I es la matriz unidad del mismo orden:

$$A\cdot B=I \Rightarrow B\cdot A=I$$

En efecto:

Si A·B=I, entonces la ecuación matricial A·X=I es compatible determinada y B es su solución (pues la satisface); por tanto, al resolver dicha ecuación por el método de Gauss-Jordan resultará que (A|I)~(I|B); pero entonces, como acabamos de ver, (B|I)~(I|A); lo que significa que A es la solución de la ecuación matricial B·X=I y, en consecuencia, B·A=I.[4]

* * *

Por tanto, para averiguar si una matriz cuadrada A es invertible o no y, en caso afirmativo, calcular su inversa, lo que haremos será resolver por el método de Gauss-Jordan la ecuación matricial A·X=I:

- Si es incompatible, entonces A no tiene inversa, ya que no existe B tal que A·B=I.
- Si es compatible y B es la solución, entonces A·B=I; pero entonces, como acabamos de ver, B·A=I; lo que significa que A es invertible y que $B=A^{-1}$; esto es:

$$(A|I)\sim(I|B) \Rightarrow B=A^{-1}$$

* * *

Calculemos, por ejemplo, la inversa de la matriz A:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\overset{5}{\rightarrow}\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\overset{6}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)\overset{7}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)\overset{8}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)\overset{9}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right)\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Comprobemos el resultado:

---

[1] 1ªf·3 y 2ªf·(-2).
[2] 1ªf-2·2ªf.
[3] 2ªf↔1ªf.
[4] Esto significa que no será necesario probar que A·B=I y que B·A=I para poder asegurar que la inversa de A es B (y que la inversa de B es A), sino que bastará con probar uno solo de dichos productos.
[5] Resolvemos la ecuación matricial A·X=I.
[6] 2ªf-1ªf.
[7] 1ªf·3.
[8] 1ªf+2·2ªf.
[9] 1ªf·1/6; 2ªf·1/3.

$$\begin{pmatrix}2&-2\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/6&1/3\\-1/3&1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3+2/3&2/3-2/3\\1/3-1/3&2/3+1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Calculemos ahora la inversa de la matriz B:

$$B=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&6\end{pmatrix}\ \overset{1}{\rightarrow}\ \left(\begin{array}{cc|cc}1&-3&1&0\\-2&6&0&1\end{array}\right)\ \overset{2}{\sim}\ \left(\begin{array}{cc|cc}1&-3&1&0\\0&0&2&1\end{array}\right)$$

Como la ecuación $B\cdot X=I$ es incompatible, B no tiene inversa.

* * *

Si A, X y B son matrices cuadradas de orden n y A es invertible, se puede despejar X en las ecuaciones matriciales $A\cdot X=B$ y $X\cdot A=B$ multiplicando ambos miembros por A^{-1} (por la izquierda en la primera y por la derecha en la segunda):

$$A\cdot X=B \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow I\cdot X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$
$$X\cdot A=B \Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1} \Rightarrow X\cdot I=B\cdot A^{-1} \Rightarrow X=B\cdot A^{-1}$$

3.- Caracterización de las matrices invertibles

Si A es una matriz cuadrada de orden n:

$$A \text{ es invertible} \Leftrightarrow rg(A)=n$$

En efecto:

- Si A es invertible, entonces $rg(A)=n$; pues si $rg(A)\neq n$, la ecuación matricial $A\cdot X=I$, donde I es la matriz unidad de orden n, sería incompatible y, por tanto, A no tendría inversa.
- Si $rg(A)=n$, la ecuación matricial $A\cdot X=I$, donde I es la matriz unidad de orden n, es compatible. Por tanto, A es invertible.

4.- Problemas

1) Calcula, si existe, la inversa de las matrices:

a) $\begin{pmatrix}2&3\\-5&4\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}4&1\\0&2\end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix}\operatorname{sen} a&-\cos a\\\cos a&\operatorname{sen} a\end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\2&0&3\end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix}-1&3&-2\\-1&-4&1\\0&5&-2\end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&-4\\3&7&-3\end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\3&1&0\end{pmatrix}$ **k)** $\begin{pmatrix}5&2&7\\4&2&6\\2&3&6\end{pmatrix}$ **l)** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

[1] Resolvemos la ecuación matricial $B\cdot X=I$.
[2] 2ªf+2·1ªf.

m) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **n)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ **ñ)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

o) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **p)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}$ **q)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

r) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ **s)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **t)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

2) Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales ayudándote de la matriz inversa:[1]

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 8 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

e) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3) Ayudándote de la matriz inversa, resuelve la ecuación AX=X+I, donde A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, halla X si A·X·B=C.

5) Despeja X e indica en cada caso qué se requiere para poderlo hacer:

a) A·X+B=C **b)** X·A+X·B=C **c)** A·X=X+B

d) A·X·B=C **e)** X·A+2·X=B **f)** A·X=B·X

6) Resuelve la ecuación A·X=B·B', done A y B son las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

7) Si A es una matriz cuadrada y $A^2=A+I$, ¿es A invertible?

8) Si A es una matriz cuadrada y $A^2-3A=-2I$, demuestra que A es invertible y calcula su inversa en función de A.

9) Si $(B+A)^2=B^2+B \cdot A+I$, demuestra que A es invertible y despeja la matriz B.

[1] Evidentemente, es preferible resolverlas directamente como lo hacíamos en la lección SM-12.