Índice: Eliminación lineal de parámetros. Problemas.

1.- Eliminación lineal de parámetros

La eliminación lineal de parámetros es el proceso inverso de la resolución de un sistema. Permite pasar de la solución al sistema.

Razonaremos el procedimiento sobre un ejemplo. Supongamos que la solución general, S, de un cierto sistema es:

$$\begin{cases} x=3-4\alpha+5\beta \\ y=2-\alpha+\beta \\ z=4+\alpha-3\beta \end{cases}$$

Podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿(2,0,2) pertenece a S?

La respuesta es que pertenecerá a S si existen valores de α y β tales que al sustituirlos en la expresión anterior dan como resultado x=2, y=0 y z=2; en caso contrario, si no existen tales valores de α y β, (2,0,2) no pertenecerá a S. Para decidir la cuestión tendremos que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2=3-4\alpha+10\beta \\ 0=2-\alpha+\beta \\ 2=4+\alpha-3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\alpha+10\beta=-1 \\ -\alpha+\beta=-2 \\ \alpha-3\beta=-2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 10 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -4 & 10 & -1 \end{array}\right) \overset{2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -9 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Como el sistema es incompatible, (2,0,2) no pertenece a S.

Lo hecho con la terna (2,0,2) lo podemos hacer con cualquier otra. Incluso con todas a la vez. Si (x,y,z) es una terna cualquiera, para decidir si pertenece o no a S resolveremos, igual que antes, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x=3-4\alpha+10\beta \\ y=2-\alpha+\beta \\ z=4+\alpha-3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\alpha+10\beta=x-3 \\ -\alpha+\beta=y-2 \\ \alpha-3\beta=z-4 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 10 & x-3 \\ -1 & 1 & y-2 \\ 1 & -3 & z-4 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & z-4 \\ -1 & 1 & y-2 \\ -4 & 10 & x-3 \end{array}\right) \overset{2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|r} 1 & -3 & z-4 \\ 0 & -2 & y+z-6 \\ 0 & -2 & x+4z-19 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|r} 1 & -3 & z-4 \\ 0 & -2 & y+z-6 \\ 0 & 0 & x-y+3z-13 \end{array}\right)$$

Evidentemente, las ternas (x,y,z) que pertenecen a S son aquéllas que verifican la ecuación x-y+3z-13=0. Las que no la verifican, como

[1] 1ªf↔3ªf.
[2] 2ªf+1ªf; 3ªf+4·1ªf.
[3] 3ªf-2ªf.

la terna (2,0,2), no pertenecen a S.

Por consiguiente, el sistema buscado, que en este caso consta de una sola ecuación, es:

$$x-y+3z-13=0$$

2.- Problemas

1) Elimina los parámetros en las siguientes expresiones:

a) $\begin{cases} x=3\alpha+2\beta-5\gamma+4\delta \\ y=3\alpha-\beta+3\gamma-3\delta \\ z=3\alpha+5\beta-13\gamma+11\delta \end{cases}$

b) $\begin{cases} x=\alpha-\beta+\gamma \\ y=\alpha-\gamma \\ z=-\alpha-2\beta+5\gamma \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=2\alpha+3\beta-4\gamma-\delta \\ y=\alpha-2\beta+\gamma+3\delta \\ z=5\alpha-3\beta-\gamma+8\delta \\ t=3\alpha+8\beta-9\gamma-5\delta \end{cases}$

d) $\begin{cases} x=3+4\alpha+5\beta \\ y=2-\alpha+\beta \\ z=4+\alpha-3\beta \\ t=2-\alpha+\beta \end{cases}$

e) $\begin{cases} x=-1+\alpha \\ y=2+5\alpha \\ z=4-\alpha \end{cases}$

f) $\begin{cases} x=1-\alpha+\beta \\ y=-2+3\alpha-2\beta \\ z=-1-\alpha+7\beta \end{cases}$

2) Escribe las siguientes expresiones utilizando menos parámetros:

a) $\begin{cases} x=\alpha-2\beta \\ y=2\alpha-\gamma \\ z=8\beta-2\gamma \\ t=\alpha+2\beta-2\gamma \end{cases}$

b) $\begin{cases} x=1-\alpha+\beta+\gamma-2\delta \\ y=2+2\alpha+\beta+3\delta \\ z=\alpha+2\beta+\gamma+\delta \end{cases}$