

Índice: Matrices invertibles. Propiedades de las matrices invertibles. Problemas.

1.- Matrices invertibles

La matriz cuadrada A es *invertible* si existe una matriz cuadrada del mismo orden, B , llamada *inversa* de A , tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$.

Las matrices invertibles se llaman también *regulares*, y las que no son invertibles, *singulares*.

2.- Propiedades de las matrices invertibles

1ª) La inversa de A , si existe, es única.

En efecto, si B y C son inversas de A , $A \cdot B = B \cdot A = I$ y $A \cdot C = C \cdot A = I$. Pero entonces:

$$B \cdot [A \cdot C] \stackrel{1}{=} [B \cdot A] \cdot C \stackrel{2}{\Rightarrow} B \cdot I = I \cdot C \stackrel{3}{\Rightarrow} B = C$$

Como la inversa de A , si existe, es única, se designa por A^{-1} .

2ª) $(A^{-1})^{-1} = A$.

En efecto:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

3ª) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

En efecto:

$$\begin{aligned} A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} &\stackrel{4}{=} A \cdot I \cdot A^{-1} \stackrel{3}{=} A \cdot A^{-1} \stackrel{5}{=} I \\ B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B &\stackrel{5}{=} B^{-1} \cdot I \cdot B \stackrel{3}{=} B^{-1} \cdot B \stackrel{4}{=} I \end{aligned}$$

4ª) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

En efecto:

$$\begin{aligned} A' \cdot (A^{-1})' &\stackrel{6}{=} (A^{-1} \cdot A)' \stackrel{5}{=} I' \stackrel{7}{=} I \\ (A^{-1})' \cdot A' &\stackrel{6}{=} (A \cdot A^{-1})' \stackrel{5}{=} I' \stackrel{7}{=} I \end{aligned}$$

5ª) Si k es un número real distinto de cero, $(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$.

En efecto:

$$kA \cdot k^{-1}A^{-1} \stackrel{8}{=} k k^{-1} \cdot AA^{-1} \stackrel{5}{=} 1 \cdot I \stackrel{9}{=} I$$

¹ Por la propiedad asociativa del producto de matrices.

² Ya que B y C son inversas de A .

³ Ya que I es la matriz unidad.

⁴ Ya que B^{-1} y B son inversas.

⁵ Ya que A^{-1} y A son inversas.

⁶ Por las propiedades de las matrices traspuestas.

⁷ La traspuesta de I' es I .

⁸ Por la 4ª propiedad del producto de matrices.

⁹ Por la 4ª propiedad del producto de una matriz por un número real.

$$k^{-1}A^{-1} \cdot kA \stackrel{1}{=} k^{-1}k \cdot A^{-1}A \stackrel{2}{=} 1 \cdot I \stackrel{3}{=} I$$

3.- Problemas

1) Si A es invertible, ¿se cumple $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$? ¿Y $(A^3)^{-1}=(A^{-1})^3$?

2) Demuestra por el método de inducción completa que

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$$

3) Prueba que: $(A+B) \cdot A^{-1} \cdot (A-B) = (A-B) \cdot A^{-1} \cdot (A+B)$.

4) Si $A^3=0$, prueba que la inversa de $I+A+A^2$ es $I-A$.

5) Si A es invertible y $B \cdot (2A+I) = A \cdot X \cdot A + B$, despeja la matriz X.

¹ Por la 4ª propiedad del producto de matrices.

² Ya que A^{-1} y A son inversas.

³ Por la 4ª propiedad del producto de una matriz por un número real.