Índice: Producto de matrices. Propiedades del producto de matrices. Problemas.

1.- Producto de matrices

a) El producto de una matriz fila de orden $1\times n$ por una matriz columna de orden $n\times 1$ es una matriz cuadrada de orden 1 que se obtiene de la siguiente manera:

$$(a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}=(a_1\cdot x_1+a_2\cdot x_2+\ldots+a_n\cdot x_n)$$

Por ejemplo:

$$(0\ 1\ 5)\cdot\begin{pmatrix}3\\-7\\2\end{pmatrix}=(0\cdot 3+1\cdot(-7)+5\cdot 2)=(3)$$

* * *

Una ecuación lineal $a_1\cdot x_1+a_2\cdot x_2+\ldots+a_n\cdot x_n=c$ puede escribirse como una ecuación matricial de la siguiente forma:

$$(a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}=(c)$$

Por ejemplo, la ecuación $3x-2y+z=8$ puede escribirse así:

$$(3\ \ -2\ \ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(8)$$

b) El producto de una matriz de orden $m\times n$ por una matriz columna de orden $n\times 1$ es una matriz columna de orden $m\times 1$ que se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n\\a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_n\end{pmatrix}$$

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix}3&-1&2\\1&2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2-1\cdot 3+2\cdot(-1)\\1\cdot 2+2\cdot 3+5\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

* * *

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede escribirse como una ecuación matricial de la forma $A\cdot X=C$, donde A es la *matriz de coeficientes* del sistema; X, la matriz columna de las incógnitas y C, la matriz columna de los términos independientes:

$$\left.\begin{matrix} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=c_1 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=c_m \end{matrix}\right\} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix} \to A\cdot X=C$$

Por ejemplo:

$$\left.\begin{matrix} 2x-y+3z=4 \\ x-y=8 \end{matrix}\right\} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

* * *

Para resolver un sistema como el anterior por el método de Gauss hemos utilizado la matriz A|C, llamada *matriz ampliada*:

$$A|C=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

c) Si $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ son dos matrices de órdenes $m\times n$ y $n\times p$, respectivamente, se llama *producto* de las matrices A y B, y se escribe $A\cdot B$ o $(a_{ij})\cdot(b_{ij})$, a la matriz de orden $m\times p$ $(a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj})$.[1]

* * *

Por ejemplo:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\cdot 4+2\cdot 2 & -1\cdot 6+2\cdot 3 \\ 1\cdot 4-2\cdot 2 & 1\cdot 6-2\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observa que, si el producto de dos matrices es 0, ello no implica que una de ellas deba ser 0.

Si calculamos B·A, se comprueba que el producto de matrices no es conmutativo:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\cdot(-1)+6\cdot 1 & 4\cdot 2+6\cdot(-2) \\ 2\cdot(-1)+3\cdot 1 & 2\cdot 2+3\cdot(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si A es una matriz de orden $m\times n$ y B es una matriz de orden $n\times p$, con $m\neq p$, sólo tiene sentido el producto A·B:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -5 & -3 \\ 1 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] Esto es, a la matriz cuyo elemento ij-ésimo es la suma de los productos de los elementos de la fila i-ésima de A por los correspondientes elementos de la columna j-ésima de B, ambas de n elementos al ser A una matriz de orden $m\times n$ y B una matriz de orden $n\times p$. (En lo que sigue simplificaremos diciendo que el elemento ij-ésimo se obtiene multiplicando la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B.)

2.- Propiedades del producto de matrices[1]

1ª) Asociativa: si A, B y C son tres matrices de órdenes $m\times n$, $n\times p$ y $p\times q$, respectivamente, entonces $[A\cdot B]\cdot C=A\cdot[B\cdot C]$.

2ª) Distributiva:

- Si A es una matriz de orden $m\times n$, y las matrices B y C son de orden $n\times p$, entonces $A\cdot[B+C]=A\cdot B+A\cdot C$.
- Si A y B son dos matrices de orden $m\times n$ y C es una matriz de orden $n\times p$, entonces $[A+B]\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

3ª) El elemento neutro del producto de matrices cuadradas de orden n es la matriz unidad de orden n: si A es una matriz cuadrada de orden n e I es la matriz unidad del mismo orden, $A\cdot I=I\cdot A=A$.[2]

4ª) Si t es un número real y A y B son dos matrices de órdenes $m\times n$ y $n\times p$, respectivamente, entonces: $[t\cdot A]\cdot B=t\cdot[A\cdot B]=A\cdot[t\cdot B]$.

3.- Problemas

1) Escribe los siguientes sistemas de ecuaciones en forma de ecuación matricial:

a) $\begin{cases} -3x-8y+5z=0 \\ x+7y-5z=4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ 7x-y=1 \\ 5x+2y=-3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x-y+8z+t=-2 \\ x-3y+2z+7t=0 \\ 2x-y-z+3t=-1 \\ 2x-y-3z-2t=5 \end{cases}$

2) Escribe las siguientes ecuaciones matriciales en forma de sistema de ecuaciones lineales:

a) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -1 \\ 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

3) Realiza, si es posible, los siguientes productos de matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -5 & 7 & 9 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -5 & 7 & 9 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) Si $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $\frac{1}{7}(A^2+2I)$ **b)** $A^2-7A+2I$

[1] Las demostraciones de estas propiedades se verán en la próxima lección.
[2] Si A es una matriz de orden $m\times n$, la matriz unidad de orden m es el elemento neutro por la izquierda y la matriz unidad de orden n, el elemento neutro por la derecha.

5) Si $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, halla:

a) $A^3-7A^2+5A+4I$ **b)** B^3-B^2

6) Si $x^2+y^2+z^2=1$ y $M=\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$, calcula:

a) M^2 **b)** $P=M^2+I$ **c)** $P\cdot M$ **d)** P^2

7) Si A es una matriz idempotente,[1] prueba que la matriz $B=2A-I$ cumple la condición $B^2=I$.

8) Prueba que la siguiente matriz es idempotente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9) Prueba que la siguiente matriz es periódica,[2] y calcula su período:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

10) Prueba que la siguiente matriz es involutiva:[3]

$$\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

11) Prueba que la siguiente matriz es nilpotente,[4] y calcula su orden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

12) Si $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla los números p y q de modo que $A^2+pA+qI=0$.

13) Calcula X^2+Y^2 si X e Y son las matrices solución del siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$4X-3Y=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix};\ 2X+Y=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

14) Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $X\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\cdot X$ **b)** $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

[1] La matriz cuadrada A es *idempotente* si $A^2=A$.
[2] La matriz cuadrada A es *periódica* de periodo n si $A^{n+1}=A$ y n es el menor número natural distinto de cero que verifica dicha igualdad.
[3] La matriz cuadrada A es *involutiva* si $A^2=I$.
[4] La matriz cuadrada A es *nilpotente* de orden n si $A^{n+1}=0$ y $A^n\neq 0$.

e) $\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\cdot X=X\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

g) $(2\ \ -1\ \ 0)\cdot X=(0)$

h) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&2&0\\-1&-3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot X=X\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

j) $X\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}\cdot X$

15) Calcula el elemento neutro por la izquierda y el elemento neutro por la derecha de las siguientes matrices. Comprueba el resultado:

a) $\begin{pmatrix}0&1&-3&8\\1&-2&0&-1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}0&1&5\\1&-2&0\\3&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

16) Si A, B y C son las siguientes matrices, calcula los productos A·B, B·C, [A·B]·C y A·[B·C]:

$$A=\begin{pmatrix}0&8\\1&-1\\2&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-2&3&0\\1&-2&-1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\1&0&0&4\\-2&-2&2&-1\end{pmatrix}$$

17) Si A, B y C son las siguientes matrices, halla A·B, A·C, A·[B+C] y A·B+A·C:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1\\-1&4&-3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&6\\-2&-7\\1&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&-2\\-2&-1\\1&3\end{pmatrix}$$

18) Si A, B y C son las siguientes matrices, halla A·C, B·C, [A+B]·C y A·C+B·C:

$$A=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\\3&-2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\-2&0\\3&-1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\-2&0&2&4\end{pmatrix}$$

19) Si A y B son las siguientes matrices, halla $I_3\cdot A$, $A\cdot I_2$, $I_2\cdot B$ y $B\cdot I_2$ (I_n es la matriz cuadrada de orden n):

$$A=\begin{pmatrix}-5&-1\\3&-1\\0&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-2&2\\3&-1\end{pmatrix}$$

20) Si A y B son las siguientes matrices, calcula los productos A·B, [2·A]·B, A·[2·B] y 2·[A·B]:

$$A=\begin{pmatrix}2&-3\\0&-5\\7&8\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&4&3\\-2&-6&-1\end{pmatrix}$$

21) Comprueba que $(A+B)^2=A^2+B^2$ si:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1\\4&-1\end{pmatrix}$$