*Índice: Transformaciones elementales. Matrices equivalentes. Rango de una matriz. Problemas.*

## 1.- Transformaciones elementales

Una matriz cualquiera se puede transformar en otra mediante las siguientes operaciones, que reciben el nombre de *transformaciones elementales:*

**1ª)** Cambiar entre sí dos filas (o dos columnas).

**2ª)** Multiplicar una fila (o columna) por un número distinto de 0.

**3ª)** Sumar a una fila (o columna) otra fila (o columna) multiplicada por un número.

**4ª)** Eliminar (o añadir) una fila (o columna) cuyos elementos son todos 0.

Evidentemente, estas transformaciones son reversibles.

Conviene advertir que cuando las matrices representen sistemas de ecuaciones, sólo pueden aplicarse las transformaciones elementales por filas.[1]

## 2.- Matrices equivalentes

Dos matrices A y B son *equivalentes*, y se escribe A~B, si se puede pasar de una a otra mediante un número finito de transformaciones elementales.

* * *

Evidentemente, si A~B, entonces B~A.

Veámoslo con un ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \overset{3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \overset{5}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}=B$$

Si invertimos la cadena de equivalencias, aplicando en cada paso la correspondiente transformación recíproca, tenemos lo siguiente:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix} \overset{6}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \overset{7}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{8}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \overset{9}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}=A$$

---

[1] Aunque también puede aplicarse la primera transformación elemental de columnas (pues ésta supone tan sólo un cambio de posición de las incógnitas en el sistema).

[2] 1ªc↔2ªc.

[3] 1ªc·1/2.

[4] 2ªc-3·1ªc.

[5] Añadimos la tercera columna nula.

[6] Eliminamos la tercera columna nula.

[7] 2ªc+3·1ªc.

[8] 1ªc·2.

[9] 1ªc↔2ªc.

* * *

Es fácil ver que cualquier matriz no nula es equivalente a una matriz unidad de un cierto orden. Por ejemplo:[1]

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \overset{2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \overset{3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{4}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{5}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \overset{6}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \overset{7}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \overset{8}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{9}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El método más sencillo para comprobar si dos matrices dadas son o no equivalentes es averiguar si son equivalentes o no a la misma matriz unidad ($I_n$ es la matriz unidad de orden n):

$$A\sim I_n \text{ y } B\sim I_n \overset{10}{\Rightarrow} A\sim I_n\sim B \Rightarrow A\sim B$$

## 3.- Rango de una matriz

Se llama *rango* de una matriz no nula al orden de la matriz unidad equivalente. El rango de las matrices nulas es, por definición, cero. El rango de A se denota por rg(A).

* * *

Así, el rango de la matriz A del ejemplo anterior es 2. Observa que para llegar a esa conclusión no es necesario realizar las transformaciones por columnas (las realizadas en la segunda fila de cálculos), ya que el rango coincide con el número de filas no nulas (o de pivotes) que quedan después de aplicar el método de Gauss por filas,[11] incluso sobra también el paso de suprimir las filas nulas.

* * *

Observa que el número de ecuaciones fundamentales de un sistema, esto es, el número de ecuaciones compatibles de cualquier sistema

[1] El procedimiento que seguimos consiste en aplicar primero el método de Gauss por filas (esto es, conseguir mediante transformaciones elementales de filas una matriz escalonada equivalente) y luego, mediante transformaciones elementales de columnas, hacer 1 el primer pivote y 0 los elementos que están a su derecha, repitiendo lo mismo con los demás pivotes y eliminando al final las columnas nulas.
[2] 2ªf+2·1ªf.
[3] 3ªf-2ªf.
[4] Eliminamos la última fila.
[5] 1ªc·1/2.
[6] 2ªc-3·1ªc; 3ªc+1ªc; 4ªc-2·1ªc.
[7] 2ªc·1/4.
[8] 3ªc+2·2ªc; 4ªc-5·2ªc.
[9] Eliminamos las dos últimas columnas.
[10] Si $B\sim I_n$, como las transformaciones elementales son reversibles, $I_n\sim B$.
[11] Al poder trabajar con filas y con columnas, hay que especificar si el método de Gauss se aplica a las primeras o a las segundas. Si es a estas últimas, se trata de conseguir que el primer elemento no nulo de cada columna esté precedido de más elementos nulos que la columna anterior, anulando al final las columnas nulas (no lo utilizaremos).

escalonado equivalente, coincide con el rango de la matriz de coeficientes del sistema.

* * *

Por último, observa también que el procedimiento que hemos seguido en el ejemplo para obtener la matriz unidad equivalente no es único. Por ejemplo, podríamos haber comenzado multiplicando la primera columna por 1/2 o intercambiando la primera columna con la tercera, etc.; y lo mismo podríamos haber hecho en los demás pasos. La cuestión que se nos plantea entonces es si se llega a la misma matriz unidad, independientemente del camino utilizado. Si no fuera así, el concepto de rango estaría mal definido y, en consecuencia, lo mismo sucedería con el de número de ecuaciones fundamentales de un sistema. Sin embargo, la respuesta es que sí, que se llega siempre a la misma matriz unidad, pero la demostración la dejaremos para la lección DV-8. La damos, pues, por hecha.

* * *

Una consecuencia de la definición de rango es la siguiente:

$$rg(A)=rg(B) \Leftrightarrow A\sim B$$

En efecto:

- $rg(A)=rg(B)=n \Rightarrow A\sim I_n$ y $B\sim I_n \overset{1}{\Rightarrow} A\sim I_n\sim B \Rightarrow A\sim B$
- $A\sim B$ y $rg(B)=n \Rightarrow A\sim B$ y $B\sim I_n \Rightarrow A\sim B\sim I_n \Rightarrow A\sim I_n \Rightarrow rg(A)=n$

## 4.- Problemas

**1)** Determina el rango de las siguientes matrices:

**a)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

**d)** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

**g)** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & 10 & -2 \\ 4 & 4 & 12 & 22 & 16 \\ 7 & 6 & 19 & 38 & 23 \end{pmatrix}$

**j)** $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}$ **k)** $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **l)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

[1] Si $B\sim I_n$, como las transformaciones elementales son reversibles, $I_n\sim B$.

**2)** Según sea el valor de k, halla el rango de las matrices:

**a)** $\begin{pmatrix} k & 3 & -1 \\ 0 & k+1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} k & k+3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & k+3 \\ 1 & k & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k-1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ k & 1 & k+2 \\ 0 & k+3 & 4 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1+k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2k \end{pmatrix}$

**g)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ k+1 & 1 & 1 \\ 1 & k & k-1 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ k+1 & -1 & k-2 \\ -1 & k+1 & 2 \end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix} 1 & k+2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & k \end{pmatrix}$

**j)** $\begin{pmatrix} 0 & k & k \\ 1 & 0 & 1 \\ k & -2 & 0 \end{pmatrix}$ **k)** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & k \\ k & k-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **l)** $\begin{pmatrix} 2k+2 & 3 & k \\ 4k-1 & k+1 & 2k-1 \\ 5k-4 & k+1 & 3k-4 \end{pmatrix}$

**3)** Calcula los números naturales a y b, si son menores que 10 y el rango de la siguiente matriz es 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$$

**4)** Puede aumentar el rango de una matriz cuadrada de 3 filas al sustituir un coeficiente no nulo por 0? ¿Y permanecer igual? Justifica las respuestas.

**5)** Escribe una matriz de 3 filas y cuatro columnas que no tenga ningún coeficiente nulo y cuyo rango sea 2.

**6)** Comprueba si son o no equivalentes las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$