

Índice: *Sistemas con parámetro. Problemas.*

1.- Sistemas con parámetro

Son sistemas en los que algunos coeficientes y términos independientes dependen de un parámetro.¹ Se trata, pues, de resolver, no un sistema, sino infinitos sistemas a la vez, uno por cada valor del parámetro.

Por ejemplo, resolvamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax-2y+z=1 \\ x-2ay+z=-2 \\ x-2y+az=1 \end{cases}$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2a & 1 & -2 \\ 1 & -2 & a & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & -2a & 1 & -2 \\ a & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 2-2a & 1-a & -3 \\ 0 & 2a-2 & 1-a^2 & 1-a \end{array} \right) \xrightarrow{4}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 2-2a & 1-a & -3 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & -2-a \end{array} \right) \xrightarrow{5} \begin{cases} 2-2a=0 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1 \\ a^2+a-2=0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow a=-2, a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=-2$,⁶ el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{7} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 2y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow z=-1-2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1+2y+2z=1+2y-2-4y=-1-2y \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1-2\alpha \end{cases}$$

2º) Si $a=1$,⁶ el sistema es incompatible:⁸

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

¹ Pueden también depender de más de un parámetro. Aquí nos reduciremos al estudio de los sistemas que dependen de un parámetro.

² $1^a f \leftrightarrow 3^a f$.

³ $2^a f - 1^a f$; $3^a f - a \cdot 1^a f$.

⁴ $3^a f + 2^a f$.

⁵ Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 3º).

⁶ Sustituimos el valor de a en el sistema escalonado que hemos obtenido (no en el de partida).

⁷ $2^a f \cdot 1/3$; eliminamos la última fila.

⁸ No es necesario calcular el sistema escalonado para verlo.

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:¹

$$\left. \begin{array}{l} x-2y+az=1 \\ (2-2a)y+(1-a)z=-3 \\ (2-a-a^2)z=-2-a \end{array} \right\} \xrightarrow{2} z = \frac{-2-a}{2-2a-a^2} = \frac{-(a+2)}{-(a+2)(a-1)} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{a-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-2a)y = -3 + (a-1)z = -3 + (a-1) \cdot \frac{1}{a-1} = -3 + 1 = -2 \xrightarrow{3} y = \frac{-2}{-2(a-1)} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{a-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 + 2y - az = 1 + \frac{2}{a-1} - \frac{a}{a-1} = \frac{a-1+2-a}{a-1} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{a-1}}$$

* * *

Por ejemplo, resolvamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} mx+y+z=m \\ mx+m^2y+m^2z=m \\ mx+my+m^2z=m \end{cases}$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ m & m^2 & m^2 & m \\ m & m & m^2 & m \end{array} \right) \xrightarrow{4} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{5} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 0 \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{6}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & -m(m^2-1) & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{7} \begin{cases} m=0 \\ m-1=0 \Rightarrow m=1 \\ -m(m^2-1)=0 \Rightarrow m=0, m=\pm 1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $m=-1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{8} \begin{cases} -x+y+z=-1 \\ -2y=0 \end{cases} \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=1+y+z=1+z \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=0 \\ z=\alpha \end{cases}$$

2º) Si $m=0$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:⁹

¹ Recuerda que para cada valor de a estamos resolviendo un sistema distinto; por ejemplo, cuando $a=2$, la solución es $x=1, y=1, z=1$. Por tanto, cuando $a=2$, el sistema es compatible determinado. Y lo mismo sucede con los demás valores de a , excepto $a=-2$ y $a=1$. No se confunda, pues, el parámetro de que depende el sistema con los parámetros de que depende la solución.

² Como a no es ni 1 ni -2 , podemos despejar z .

³ Como $a \neq 1$, podemos despejar y .

⁴ $2^a f - 1^a f$; $3^a f - 1^a f$.

⁵ $2^a f \leftrightarrow 3^a f$.

⁶ $3^a f - (m+1) \cdot 2^a f$.

⁷ Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).

⁸ Escribimos directamente el sistema escalonado.

⁹ Observa que la variable x puede tomar cualquier valor, pues todos sus coeficientes son 0.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \stackrel{2}{\rightarrow} y+z=0 \Rightarrow y=-z \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-\beta \\ z=\beta \end{cases}$$

3º) Si $m=1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \stackrel{2}{\rightarrow} x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left. \begin{array}{l} mx+y+z=m \\ (m-1)y+(m^2-1)z=0 \\ -m(m^2-1)z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{z=0} \Rightarrow (m-1)y=0 \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow mx=m \Rightarrow \boxed{x=1}$$

* * *

Conviene conocer otras formas de resolver este mismo sistema que pueden servir en la resolución de otros sistemas semejantes:³

1ª)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ m & m^2 & m^2 & m \\ m & m & m^2 & m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 0 \end{array}\right) \stackrel{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & (m^2-1)(1-m) & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 0 \end{array}\right) \stackrel{5}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & (m^2-1)(1-m) & 0 \\ 0 & 0 & m(m^2-1) & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m-1=0 \Rightarrow m=1 \\ m(m^2-1)=0 \Rightarrow m=0, m=\pm 1 \end{cases}$$

El estudio de los distintos casos es igual que antes.

2ª)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ m & m^2 & m^2 & m \\ m & m & m^2 & m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 0 \end{array}\right) \stackrel{6}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 & 0 \\ 0 & m^2-1 & m-1 & 0 \end{array}\right) \stackrel{5}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & m-m^2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m^2-1=0 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=\pm 1 \\ m-m^2=0 \Rightarrow m(1-m)=0 \Rightarrow m=0, m=1 \end{cases}$$

Al estudiar los distintos casos hay que tener cuidado a la hora de escribir las ecuaciones, ya que hemos cambiado de posición las dos

¹ Como el sistema no es escalonado, aplicamos Gauss: 2^af+1^af ; eliminamos la 3^af .

² Escribimos directamente el sistema escalonado.

³ No justificamos el primer paso, pues coincide con el dado antes.

⁴ $2^af-m \cdot 3^af$.

⁵ 3^af-2^af .

⁶ $2^ac \leftrightarrow 3^ac$. Esto supone un cambio de posición de las incógnitas y y z , que conviene señalar como hemos hecho, pues, de lo contrario, se corre el peligro de olvidarlo luego; por eso no es recomendable esta alternativa, salvo que simplifique los cálculos, como en este caso.

últimas incógnitas.

3ª) Este procedimiento y los que siguen no son recomendables, salvo que no dispongamos de otra alternativa mejor:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ m & m^2 & m^2 & m \\ m & m & m^2 & m \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 0 \end{array} \right) \stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 & 0 \\ 0 & m^2-1 & (m^2-1)(m+1) & 0 \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & m(m^2-1) & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m^2-1=0 \Rightarrow m=\pm 1 \\ m(m^2-1)=0 \Rightarrow m=0, m=\pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora habría que estudiar primero el caso $m=-1$, pero no en el sistema escalonado que hemos obtenido, sino en el de partida;³ y luego los demás casos como siempre.

Veamos el caso $m=-1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \stackrel{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \stackrel{5}{\rightarrow} \begin{cases} -x+y+z=-1 \\ -2y=0 \end{cases} \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=1+z \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=0 \\ z=\alpha \end{cases}$$

Si hubiésemos estudiado el caso $m=-1$ en el sistema escalonado, habríamos cometido un error:⁶

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \stackrel{5}{\rightarrow} -x+y+z=-1 \Rightarrow x=1+y+z \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha+\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

4ª) Este procedimiento es similar al anterior:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ m & m^2 & m^2 & m \\ m & m & m^2 & m \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 0 \end{array} \right) \stackrel{7}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & 0 \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m^2-m & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m-1=0 \Rightarrow m=1 \\ m(m-1)=0 \Rightarrow m=0, m=1 \end{cases} \end{aligned}$$

El caso $m=-1$ se estudia igual que antes, o sea, en el sistema de partida o en el inmediatamente anterior al paso señalado con la nota 7. Aquí el error que se puede cometer es olvidarse de dicho caso, al no anular ese valor a los pivotes.

¹ $3^{\text{af}} \cdot (m+1)$. Evidentemente, este paso no puede darse, ya que $m+1$ no siempre es distinto de cero (como exige la segunda transformación elemental). Pues bien, lo que se hace es suponer que $m \neq -1$ y estudiar el caso $m=-1$ aparte.

² $3^{\text{af}} - 2^{\text{af}}$.

³ O, si se prefiere, en el inmediatamente anterior al paso señalado con la nota 1, pues es en ese paso en el que hemos necesitado suponer $m \neq -1$.

⁴ $2^{\text{af}} - 1^{\text{af}}$; $3^{\text{af}} - 1^{\text{af}}$. Si se utiliza el sistema indicado en la nota anterior, sobra este paso.

⁵ Escribimos directamente el sistema escalonado.

⁶ Error que no dejaría de serlo aunque el resultado coincidiese con el correcto.

⁷ $2^{\text{af}} \cdot 1 / (m+1)$. Para poder dar este paso suponemos $m \neq -1$ y estudiamos el caso $m=-1$ aparte.

5ª) Parecido a los dos anteriores es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & | & m \\ m & m^2 & m^2 & | & m \\ m & m & m^2 & | & m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & | & m \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 & | & 0 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & | & 0 \end{pmatrix} \stackrel{1}{\sim} \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & | & m \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & m+1 & | & 0 \end{pmatrix} \stackrel{2}{\sim} \\ \sim \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & | & m \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & m & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=0 \end{cases}$$

Los casos $m=-1$ y $m=1$ se estudian igual que antes, en el sistema de partida o en el inmediatamente anterior al paso señalado con la nota 1. Aquí el error que se puede cometer es olvidarse de estudiarlos al no anular esos valores a los pivotes.

6ª) Similar a los anteriores es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & | & m \\ m & m^2 & m^2 & | & m \\ m & m & m^2 & | & m \end{pmatrix} \stackrel{3}{\sim} \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & | & m \\ 1 & m & m & | & 1 \\ 1 & 1 & m & | & 1 \end{pmatrix} \stackrel{4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & | & 1 \\ 1 & m & m & | & 1 \\ m & 1 & 1 & | & m \end{pmatrix} \stackrel{5}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & | & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & | & 0 \end{pmatrix} \stackrel{6}{\sim} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & | & 1 \\ 0 & m-1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} m-1=0 \Rightarrow m=1 \\ 1-m^2=0 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=\pm 1 \end{cases}$$

El caso $m=0$ se estudia en el sistema de partida. Aquí el error que se puede cometer es olvidarse de estudiarlo al no anular ese valor a los pivotes.

2.- Problemas

1) Discute y resuelve los siguientes sistemas, según sea el valor del parámetro:

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-3y=1 \\ 3x+2y=a \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-2y=2 \\ x+y=3 \\ x+ay=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+y=a \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y=3 \\ ax+y+z=0 \\ 2x+az=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y+at=1 \\ y+z+t=2 \\ x+y=3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y+kz=2 \\ 3x+4y+2z=k \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x-3z=-3 \\ 2x+ky-z=-2 \\ x+2y+kz=1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} kx+y-z=0 \\ x-3y+z=0 \\ 3x+10y+4z=0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x-ky+4z=0 \\ x+y+7z=0 \\ kx-y+13z=0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x+y+az=4 \\ x+z=2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+(1+a)y+z=2a \\ x+y+(1+a)z=0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} (a+1)x+y+z=a+1 \\ x+(a+1)y+z=a+3 \\ x+y+(a+1)z=-2a-4 \end{cases}$

¹ $2^a f \cdot 1/(m^2-1)$; $3^a f \cdot 1/(m-1)$. Para poder dar este paso suponemos $m \neq \pm 1$ y estudiamos estos casos aparte.

² $3^a f - 2^a f$.

³ $2^a f \cdot 1/m$; $3^a f \cdot 1/m$. Para poder dar este paso suponemos $m \neq 0$ y estudiamos este caso aparte.

⁴ $1^a f \leftrightarrow 3^a f$.

⁵ $2^a f - 1^a f$; $3^a f - m \cdot 1^a f$.

⁶ $3^a f + 2^a f$.

$$\text{m)} \begin{cases} x+ay+z=a+2 \\ x+y+az=-2(a+1) \\ ax+y+z=a \end{cases}$$

$$\text{o)} \begin{cases} 2y-z=k \\ 3x-2z=11 \\ y+z=6 \\ 2x+y-4z=k \end{cases}$$

$$\text{r)} \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ -x+y+2z=3 \\ 5x+ky-4z=-1 \end{cases}$$

$$\text{u)} \begin{cases} 3x+10y+4z=0 \\ mx+y-z=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases}$$

$$\text{x)} \begin{cases} ax-ay+az=a \\ (3-2a)z=1 \\ x+(a-1)y=0 \end{cases}$$

$$\text{n)} \begin{cases} (2+a)x+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

$$\text{p)} \begin{cases} 2x+y+z+t=0 \\ kx-2y+3z+4t=0 \\ 3x-y-z+4t=0 \\ -2x+4y-z-9t=0 \end{cases}$$

$$\text{s)} \begin{cases} 2x+y-4z=m \\ 3x-y=11 \\ y+z=6 \\ 2y-z=m \end{cases}$$

$$\text{v)} \begin{cases} x+ay-z=1 \\ 2x+y-az=2 \\ x-y-z=a-1 \end{cases}$$

$$\text{y)} \begin{cases} ay+(a+1)z=a \\ ax+z=a \\ x+az=a \end{cases}$$

$$\text{ñ)} \begin{cases} x+2y+kz=1 \\ 2x+ky+8z=3 \end{cases}$$

$$\text{q)} \begin{cases} 2x+y-4z=k+1 \\ -x+5y-z=k-12 \\ x+6y-5z=k+2 \\ 2x-4y+5z=k \end{cases}$$

$$\text{t)} \begin{cases} (-7-m)x+6y+6z=0 \\ -3x+(2-m)y+3z=0 \\ -6x+6y+(5-m)z=0 \end{cases}$$

$$\text{w)} \begin{cases} (a-3)x+4z=2 \\ x-2z=-1 \\ -x+ay+2z=a \end{cases}$$

$$\text{z)} \begin{cases} ay+az=0 \\ x+z=0 \\ 4x-2y+az=a \end{cases}$$