*Índice: Ecuaciones lineales. Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas escalonados.*

## 1.- Ecuaciones lineales

Se llama *ecuación lineal de n incógnitas* a toda ecuación del tipo $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = c$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las *incógnitas*, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los *coeficientes* y c, el *término independiente*.

Una ecuación lineal con dos incógnitas es, por ejemplo, $2x-3y=8$. Las incógnitas son, evidentemente, x e y. Los números 2 y -3 son los coeficientes de la ecuación: 2 es el coeficiente de x y -3, el de y. El número 8 es el término independiente. En este caso aparece en el segundo miembro de la ecuación, pero también puede escribirse en el primero: $2x-3y-8=0$. Una ecuación es lineal si es de primer grado, esto es, si todos sus *términos* (los términos son los sumandos) son como mucho de primer grado. La ecuación $3xy-5y=1$ no es lineal porque su primer término es de segundo grado, ya que el grado de un término es la suma de los exponentes de las incógnitas que contiene.

La n-tupla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es *una solución particular* de la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$ si la satisface, esto es, si $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = c$.

*Resolver* una ecuación es encontrar todas sus soluciones particulares. El conjunto formado por todas ellas recibe el nombre de *solución general* de la ecuación.

Es fácil obtener soluciones particulares de una ecuación lineal, basta dar valores arbitrarios a todas las incógnitas menos una y calcular el correspondiente a ésta de manera que se satisfaga la ecuación.

Por ejemplo, (1,0,2) y (2,1,-1) son soluciones particulares de la ecuación lineal $x+2y+z=3$:

| x | y | z |
|---|---|---|
| 1 | 0 | $3-1-2\cdot 0=2$ |
| 2 | 1 | $3-2-2\cdot 1=-1$ |

Del mismo modo se calcula la solución general: si $x=\alpha$ e $y=\beta$, entonces $z=3-\alpha-2\beta$. La solución general es, pues, $(\alpha, \beta, 3-\alpha-2\beta)$. Se dice que la solución depende de dos parámetros. Observa que la solución de una ecuación lineal de n incógnitas depende de n-1 parámetros.

Las ecuaciones que tienen solución se llaman *compatibles* y las que no la tienen, *incompatibles*.

Una ecuación lineal se llama *homogénea* si su término independiente es cero: $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=0$. La n-tupla $(0,0,\ldots,0)$ es solución particular de cualquier ecuación homogénea de n incógnitas.

Una ecuación lineal homogénea se llama *trivial* si todos sus coeficientes son cero: $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0$. Cualquier n-tupla $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ es solución particular de la ecuación trivial de n incógnitas.

La ecuación $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=1$ es, evidentemente, incompatible.

Es fácil distinguir las ecuaciones compatibles de las incompatibles. Las que tienen todos los coeficientes nulos y el término independiente no nulo son incompatibles y las demás, compatibles.

## 2.- Sistemas de ecuaciones lineales

Se llama *sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas* a todo sistema del tipo:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=c_1 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+\ldots+a_{mn}\cdot x_n=c_m \end{array}\right\}$$

Las *incógnitas* son $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Los números $a_{ij}$ y $c_i$ son, respectivamente, los *coeficientes* y los *términos independientes*. Observa que los coeficientes tienen dos subíndices: el primero indica la ecuación a la que pertenecen y el segundo, la incógnita a la que acompañan.

Una n-tupla $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ es una *solución particular* del sistema si lo es de todas sus ecuaciones. *Resolver* un sistema es hallar todas sus soluciones particulares. El conjunto formado por todas ellas recibe el nombre de *solución general* del sistema.

Si S es la solución general del sistema y $S_i$ la solución general de la i-ésima ecuación, entonces $S=S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_m$, ya que toda solución particular del sistema lo es también de todas y cada una de sus ecuaciones, y viceversa.

Un sistema que no tiene solución se llama *incompatible* y, si la tiene, *compatible: compatible determinado* si la solución es única y *compatible indeterminado* si no lo es. Más adelante se verá que, si la solución no es única, hay infinitas soluciones.

El sistema se llama *homogéneo* si sus términos independientes son todos cero.

Observa que un sistema homogéneo de n incógnitas es siempre compatible, ya que la n-tupla $(0,0,\ldots,0)$ es una solución particular.

## 3.- Sistemas escalonados

Diremos que un sistema de ecuaciones lineales es *escalonado* si carece de ecuaciones triviales y el primer coeficiente[1] no nulo de cada ecuación (llamado *pivote*) está precedido de más coeficientes nulos que en la ecuación anterior.

Un sistema escalonado de n incógnitas no puede tener más de n ecuaciones compatibles, aunque puede tener menos:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-5z=6 \\ y+3z=-2 \\ 4z=-8 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+2y-5z=6 \\ z=-2 \end{array}\right\}$$

Tampoco puede tener más de una ecuación incompatible, ya que entonces no sería un sistema escalonado:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-5z=6 \\ y+3z=-2 \\ 4z=-8 \\ 0=-6 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+2y-5z=6 \\ z=-2 \\ 0=2 \end{array}\right\}$$

* * *

Es fácil resolver un sistema escalonado: se procede de abajo arriba, de la última ecuación a la primera.

Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-5z=6 \\ y+3z=-2 \\ 4z=-8 \end{array}\right\} \overset{2}{\Rightarrow} z=-8/4 \Rightarrow z=-2 \overset{3}{\Rightarrow} y=-2-3z=-2+6 \Rightarrow y=4 \Rightarrow$$

$$\overset{4}{\Rightarrow} x=6-2y+5z=6-8-10 \Rightarrow x=-12 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-12 \\ y=4 \\ z=-2 \end{array}\right.$$

El sistema es compatible determinado. Observa que el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas.

Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-5z=6 \\ z=-2 \end{array}\right\} \overset{5}{\Rightarrow} z=-2 \Rightarrow x=6-2y+5z=6-2y-10 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-4-2y \\ z=-2 \end{array}\right. \overset{6}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} x=-4-2\alpha \\ y=\alpha \\ z=-2 \end{array}\right.$$

La solución puede dejarse como aparece en penúltimo lugar, en cuyo caso se dice que la incógnita y hace de *parámetro*.[7] Para cada valor de y se obtiene una solución particular. Se trata, pues, de un sis-

[1] Para los efectos de la definición, el término independiente se considera coeficiente.
[2] De la última ecuación despejamos z.
[3] De la penúltima despejamos la y, sustituyendo z por su valor.
[4] De la primera despejamos la x, sustituyendo las otras dos incógnitas por sus valores.
[5] Se procede igual que antes.
[6] Hacemos $y=\alpha$.
[7] Como el sistema consta de dos ecuaciones, sólo podemos despejar dos incógnitas, haciendo la otra de parámetro.

tema compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro. Sin embargo, utilizaremos más la *expresión paramétrica* de la solución, que es la que aparece en último lugar.

Un caso extremo de sistema escalonado es el formado por una ecuación:

$$x+2y-5z=6 \Rightarrow x=6-2y+5z \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=6-2\alpha+5\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

Igual que antes, la solución puede dejarse como aparece en penúltimo lugar, en cuyo caso se dice que las incógnitas y y z hacen de parámetros,[2] o bien puede utilizarse la expresión paramétrica de la solución, que es la que aparece en último lugar. El sistema es, pues, compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros.

Otro ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-5z=6 \\ z=-2 \\ 0=1 \end{array}\right\}$$

El sistema es incompatible, ya que su última ecuación no tiene solución.

* * *

En resumen: Si la última ecuación de un sistema escalonado es incompatible, el sistema es incompatible. En los demás casos el sistema es compatible. Compatible determinado si el número de ecuaciones coincide con el de incógnitas y compatible indeterminado si el número de incógnitas es mayor que el de ecuaciones; en este caso la diferencia entre el número de incógnitas y el número de ecuaciones coincide con el número de parámetros de que depende la solución:

| Sistemas escalonados de n incógnitas | | **Número de ecuaciones compatibles** | |
|---|---|---|---|
| | | **n** | **r<n** |
| **Número de ecuaciones incompatibles** | **0** | El sistema es compatible determinado | El sistema es compatible indeterminado y la solución depende de n-r parámetros[3] |
| | **1** | El sistema es incompatible | |

[1] Hacemos $y=\alpha$ y $z=\beta$.
[2] Como el sistema consta de una ecuación, sólo podemos despejar una incógnita, haciendo las otras dos de parámetros.
[3] Como el sistema consta de r ecuaciones, sólo podemos despejar r incógnitas, haciendo las otras n-r de parámetros.