Índice: Teorema de Rouché-Fröbenius.

1.- Teorema de Rouché-Fröbenius

Si A y A|C son las matrices de coeficientes y ampliada, respectivamente, de un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas, se verifica:

1º) Si rg(A)=rg(A|C)=n, el sistema es compatible determinado.

2º) Si rg(A)=rg(A|C)=r<n, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de n-r parámetros.

3º) Si rg(A)≠rg(A|C), el sistema es incompatible.

En efecto, después de aplicar el método de Gauss a un sistema de n incógnitas, no pueden quedar más de n ecuaciones compatibles ni más de una ecuación incompatible. Y como el rango de A coincide con el número de ecuaciones fundamentales del sistema,[1] mientras que el rango de A|C coincide con el de A, si no queda ninguna ecuación incompatible, o es una unidad mayor, si queda una ecuación incompatible, sólo se pueden presentar las siguientes situaciones:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Sistemas de
ecuaciones
lineales con
n incógnitas</td><td colspan="2">nº de ecuaciones fundamentales[1]</td></tr>
<tr><td>n</td><td>r<n</td></tr>
<tr><td rowspan="2">nº de ecuaciones incompatibles que quedan después de aplicar el método de Gauss</td><td>0</td><td>rg(A)=n
rg(A|C)=n

El sistema es compatible determinado</td><td>rg(A)=r
rg(A|C)=r

El sistema es compatible indeterminado y la solución depende de n-r parámetros</td></tr>
<tr><td>1</td><td>rg(A)=n
rg(A|C)=n+1

El sistema es incompatible</td><td>rg(A)=r
rg(A|C)=r+1

El sistema es incompatible</td></tr>
</table>

[1] Número de ecuaciones compatibles que quedan después de aplicar el método de Gauss.