Índice: El método de Gauss-Jordan. Resolución de la ecuación matricial A·X=C. Problemas.

1.- El método de Gauss-Jordan

El *método de Gauss-Jordan* es una variante del método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, pero con dos añadidos. El primero es que deben hacerse 0 no sólo los coeficientes que se encuentran por debajo de cada pivote sino también los que se encuentran por encima. Y el segundo, que los pivotes deben valer 1.[1]

Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+4z=0\\ 2x-y=5\\ 2x+2z=3\end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&4&0\\2&-1&0&5\\2&0&2&3\end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&4&0\\0&-3&-8&5\\0&-2&-6&3\end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&4&0\\0&1&4&-1\\0&-2&-6&3\end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&4&-1\\0&0&2&1\end{array}\right) \overset{3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-3\\0&0&2&1\end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-3\\0&0&1&1/2\end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=-3\\ z=1/2\end{array}\right.$$

El sistema es compatible determinado.

Otro ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-3z=0\\ -3x-2y+z=1\\ 4x+3y+z=-2\end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-3&0\\-3&-2&1&1\\4&3&1&-2\end{array}\right) \overset{6}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&-2&1\\-3&-2&1&1\\4&3&1&-2\end{array}\right) \overset{7}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&-2&1\\0&1&7&-2\\0&-1&-7&2\end{array}\right) \overset{8}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&5&-1\\0&1&7&-2\\0&0&0&0\end{array}\right) \overset{9}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-5&1\\0&1&7&-2\end{array}\right) \overset{10}{\to} \left\{\begin{array}{l} x=1+5z\\ y=-2-7z\end{array}\right.$$

El sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro.

Otro ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+3z=1\\ 3x+y-z=0\\ -x-y+7z=-2\end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&1\\3&1&-1&0\\-1&-1&7&-2\end{array}\right) \overset{11}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&1\\0&1&-10&-3\\0&-1&10&-1\end{array}\right) \overset{12}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&1\\0&1&-10&-3\\0&0&0&-4\end{array}\right)$$

---

[1] Dicho de otro modo, se trata de obtener la matriz escalonada reducida equivalente. Esta matriz, a diferencia de lo que sucede con la matriz escalonada equivalente, es única, esto es, no depende del camino seguido para obtenerla. No lo demostraremos.

[2] 2ªf-2·1ªf; 3ªf-2·1ªf.

[3] 2ªf-2·3ªf.

[4] 1ªf-2ªf; 3ªf+2·2ªf.

[5] 3ªf·1/2.

[6] 1ªf+2ªf.

[7] 2ªf-3·1ªf; 3ªf+4·1ªf.

[8] 1ªf+3·2ªf; 3ªf+2ªf.

[9] 1ªf·(-1); eliminamos la tercera fila.

[10] Observa que el método de Gauss-Jordan permite despejar fácilmente las incógnitas x e y en función de z (que hace de parámetro).

[11] 2ªf-3·1ªf; 3ªf+1ªf.

[12] 3ªf+2ªf.

El sistema es incompatible.

2.- Resolución de la ecuación matricial A·X=C

Queremos resolver ecuaciones matriciales de la forma A·X=C, donde A es una matriz m×n, X una matriz n×p y C una matriz m×p.

Veamos primero un ejemplo de ecuación matricial compatible determinada:

$$\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&1\\1&-2&0\\1&-1&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&u\\y&v\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-1\\1&0\\-1&5\\6&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x+y-3z&u+v-3w\\y+z&v+w\\x-2y&u-2v\\x-y-5z&u-v-5w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-1\\1&0\\-1&5\\6&-1\end{pmatrix}$$

Esto nos conduce a un sistema de ocho ecuaciones con seis incógnitas o, mejor todavía, a dos sistemas de cuatro ecuaciones con tres incógnitas cada uno:

$$\left.\begin{aligned}x+y-3z&=8\\y+z&=1\\x-2y&=-1\\x-y-5z&=6\end{aligned}\right\}\xrightarrow{1}\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&1\\1&-2&0\\1&-1&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\1\\-1\\6\end{pmatrix}\qquad\left.\begin{aligned}u+v-3w&=-1\\v+w&=0\\u-2v&=5\\u-v-5w&=-1\end{aligned}\right\}\xrightarrow{2}\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&1\\1&-2&0\\1&-1&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\5\\-1\end{pmatrix}$$

Como los dos sistemas tienen la misma matriz de coeficientes, pueden resolverse simultáneamente por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&-3&8&-1\\0&1&1&1&0\\1&-2&0&-1&5\\1&-1&-5&6&-1\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&-3&8&-1\\0&1&1&1&0\\0&-3&3&-9&6\\0&-2&-2&-2&0\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-4&7&-1\\0&1&1&1&0\\0&0&6&-6&6\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\overset{5}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-4&7&-1\\0&1&1&1&0\\0&0&1&-1&1\end{array}\right)\overset{6}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&3&3\\0&1&0&2&-1\\0&0&1&-1&1\end{array}\right)$$

Si sólo nos fijamos en la penúltima columna, hemos resuelto el primer sistema: x=3, y=2, z=-1; si sólo nos fijamos en la última, hemos resuelto el segundo: u=3, v=-1, w=1. Por tanto:

$$\begin{pmatrix}x&u\\y&v\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

Comprobemos el resultado:

[1] Observa que la expresión matricial de este sistema puede obtenerse directamente de la ecuación matricial de partida: la matriz A por la primera columna de la matriz X es igual a la primera columna de la matriz C

[2] Lo mismo que en la nota anterior, pero con las segundas columnas de X y C.

[3] 3ªf-1ªf; 4ªf-1ªf.

[4] 1ªf-2ªf; 3ªf+3·2ªf; 4ªf+2·2ªf.

[5] 3ªf·1/6; eliminamos la última fila.

[6] 1ªf+4·3ªf; 2ªf-3ªf.

$$\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&1\\1&-2&0\\1&-1&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&3\\2&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2+3&3-1-3\\0+2-1&0-1+1\\3-4+0&3+2+0\\3-2+5&3+1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-1\\1&0\\-1&5\\6&-1\end{pmatrix}$$

* * *

Veamos ahora un ejemplo de ecuación matricial compatible indeterminada:[1]

$$\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&1\\1&0&-4\\1&-1&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&u\\y&v\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-1\\1&0\\7&-1\\6&-1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&-3&8&-1\\0&1&1&1&0\\1&0&-4&7&-1\\1&-1&-5&6&-1\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&-3&8&-1\\0&1&1&1&0\\0&-1&-1&-1&0\\0&-2&-2&-2&0\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-4&7&-1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-4&7&-1\\0&1&1&1&0\end{array}\right)$$

Si sólo nos fijamos en la penúltima columna, hemos resuelto el primer sistema: x=7+4z, y=1-z; si sólo nos fijamos en la última, hemos resuelto el segundo: u=-1+4w, v=-w.

Por tanto:[5]

$$\begin{pmatrix}x&u\\y&v\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7+4z&-1+4w\\1-z&-w\\z&w\end{pmatrix}$$

Comprobemos el resultado:

$$\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&1\\1&0&-4\\1&-1&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7+4z&-1+4w\\1-z&-w\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7+4z+1-z-3z&-1+4w-w-3w\\1-z+z&-w+w\\7+4z-4z&-1+4w-4w\\7+4z-1+z-5z&-1+4w+w-5w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-1\\1&0\\7&-1\\6&-1\end{pmatrix}$$

* * *

Veamos por último un ejemplo de ecuación matricial incompatible:[1]

$$\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&1\\1&0&-4\\1&-1&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&u\\y&v\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-1\\1&0\\7&0\\6&-1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&-3&8&-1\\0&1&1&1&0\\1&0&-4&7&0\\1&-1&-5&6&-1\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&-3&8&-1\\0&1&1&1&0\\0&-1&-1&-1&1\\0&-2&-2&-2&0\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-4&7&-1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\overset{6}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-4&7&-1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

---

[1] Como la justificación del procedimiento ya la hemos visto en el primer ejemplo, resolvemos éste directamente.
[2] 3ªf-1ªf; 4ªf-1ªf.
[3] 1ªf-2ªf; 3ªf+2ªf; 4ªf+2·2ªf.
[4] Eliminamos las dos últimas filas.
[5] Observa que cada uno de los dos sistemas depende de un parámetro y, por tanto, la matriz solución depende de dos.
[6] Suprimimos la cuarta fila.

La ecuación matricial es incompatible, ya que, de los dos sistemas que estamos resolviendo simultáneamente, el segundo es incompatible.

* * *

Podemos, pues, concluir lo siguiente:

Sea $A\cdot X=C$ una ecuación matricial, donde A es una matriz $m\times n$, X una matriz $n\times p$ y C una matriz $m\times p$.

Si $X_1, X_2, \dots, X_p$ son las columnas de la matriz X y $C_1, C_2, \dots, C_p$ son las columnas de la matriz C, resolver la ecuación matricial $A\cdot X=C$ equivale a resolver los p sistemas[1] $A\cdot X_1=C_1$, $A\cdot X_2=C_2, \dots,$ $A\cdot X_p=C_p$.

Por tanto:

1º) Si $rg(A)=rg(A|C)=n \Rightarrow rg(A)=rg(A|C_i)=n\ \forall i \Rightarrow$ los p sistemas son compatibles determinados $\Rightarrow$ la ecuación matricial es compatible determinada (que es lo que sucede en el primer ejemplo).

Observa también que si $(A|C)\sim(I|B)$, entonces B es la única solución de la ecuación matricial $A\cdot X=C$ y, en consecuencia, $A\cdot B=C$.

2º) Si $rg(A)=rg(A|C)=r<n \Rightarrow rg(A)=rg(A|C_i)=r<n\ \forall i \Rightarrow$ los p sistemas son compatibles indeterminados y la solución de cada uno depende de $n-r$ parámetros $\Rightarrow$ la ecuación matricial es compatible indeterminada y la matriz solución depende de $p\cdot(n-r)$ parámetros (que es lo que sucede en el segundo ejemplo).

3º) Si $rg(A)\neq rg(A|C) \Rightarrow rg(A)\neq rg(A|C_i)$ para uno (al menos) de los p sistemas $\Rightarrow$ un sistema (al menos) es incompatible $\Rightarrow$ la ecuación matricial es incompatible (que es lo que sucede en el tercer ejemplo).

3.- Problemas

1) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan:

a) $\begin{cases} y+z=1 \\ x+y-3z=8 \\ x-2y=-1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-y+z=6 \\ x+y-z=2 \\ x+y+z=12 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x-3y+4z=3 \\ -x+2y-3z=-2 \\ 4x-3y-z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y+z=5 \\ x+2z=1 \\ x-y=-2 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} y+z=2 \\ z+t=1 \\ x-2t=3 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x+2y-3z=6 \\ 2x-y+4z=2 \\ 4x+3y-2z=14 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+2y-2z=10 \\ 4x-y+z=4 \\ -2x+y+z=-2 \\ -x-3y=-11 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z+t=1 \\ x+y-z+t=1 \\ x+y+z-t=1 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=12 \\ x+y-z+t=-8 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x+2y-3z+2t=2 \\ 2x+5y-8z+6t=5 \\ 3x+4y-5z+2t=4 \end{cases}$ **k)** $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y-z+t=0 \\ -x-y+z+t=0 \\ x-3y+5z+9t=0 \end{cases}$ **l)** $\begin{cases} 2x+4y+5z=1 \\ x+3y+3z=-1 \\ 4x+5y+4z=2 \\ 3x+3y+2z=2 \\ 2x+5y-z=-7 \end{cases}$

[1] Repasa el primer ejemplo y lo dicho en la nota 1 de la segunda página para verlo.

m) $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=12 \\ x+y-z+t=-8 \\ x-y-z-t=1 \end{cases}$ **n)** $\begin{cases} 2x-y+z-2t=-5 \\ 2x+2y-3z+t=-1 \\ -x+y-z=-1 \\ 4x-3y+2z-3t=-8 \end{cases}$ **ñ)** $\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 2x-5y+3z=-4 \\ x+4y+6z=0 \end{cases}$

o) $\begin{cases} x-3y+4z-2t=5 \\ 2y-5z+t=2 \\ 2x-3y-z-t=16 \end{cases}$ **p)** $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+8z=4 \\ 3x+2y+17z=1 \end{cases}$ **q)** $\begin{cases} x+2y-z+3t=3 \\ 2x+4y+4z+3t=9 \\ 3x+6y-z+8t=10 \end{cases}$

2) Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 8 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **j)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **l)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 7 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

3) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación: $AX=X+I$.

4) Si $(1\ \ 2) \cdot A = (4\ \ 2\ \ -2)$ y $(1\ \ -1) \cdot A = (1\ \ -1\ \ 1)$, calcula A.