## EXTRAORDINARIO DE 2016. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} 2y+z=1 \\ (a-1)x+(a+2)y+z=0 \\ (a^2-a)x-ay=a+2 \end{cases}$$ (3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ a-1 & a+2 & 1 & 0 \\ a^2-a & -a & 0 & a+2 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & a+2 & a-1 & 0 \\ 0 & -a & a^2-a & a+2 \end{array}\right) \end{array} \overset{2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & a-1 & -1 \\ 0 & -a & a^2-a & a+2 \end{array}\right) \end{array} \overset{3}{\sim}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{a} & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{a^2-1} & a+1 \end{array}\right) \end{array} \overset{4}{\rightarrow} \begin{cases} a=0 \\ a^2-1=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

**1º)** Si a=-1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \begin{cases} z+2y=1 \\ -y-2x=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1-2y=1-2+4x=-1+4x \\ y=1-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=-1+4\alpha \end{cases}$$

**2º)** Si a=0, el sistema es incompatible:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \overset{5}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

**3º)** Si a=1, el sistema es incompatible:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

**4º)** En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} z+2y=1 \\ ay+(a-1)x=-1 \\ (a^2-1)x=a+1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{a+1}{a^2-1} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{a-1}} \Rightarrow ay=-1-(a-1)x=-1-1=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-\frac{2}{a}} \Rightarrow z=1-2y=1+\frac{4}{a} \Rightarrow \boxed{z=\frac{a+4}{a}}$$

---

[1] 1ªc↔3ªc. Esto supone un cambio de posición de las incógnitas *x* y *z*, que conviene señalar como hemos hecho, pues, de lo contrario, se corre el peligro de olvidarlo luego; por eso no es recomendable esta alternativa, salvo que simplifique los cálculos, como en este caso.

[2] 2ªf-1ªf.

[3] 3ªf+2ªf.

[4] Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).

[5] 3ªf-2ªf.

## EXTRAORDINARIO DE 2016. PROBLEMA A2.

Dados los puntos P(1,-2,3) y Q(3,0,-1), encuentra el punto R que equidista de P y Q y está en la recta

$$r\equiv\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$$

(2 PUNTOS)

### PRIMER MÉTODO:

Como el punto R está en la recta r:

$$r\equiv\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}=\alpha \Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=4+\alpha\\ y=-1+3\alpha\\ z=3+\alpha\end{cases} \Rightarrow R(4+\alpha,-1+3\alpha,3+\alpha)$$

Como el punto R equidista de P y Q:

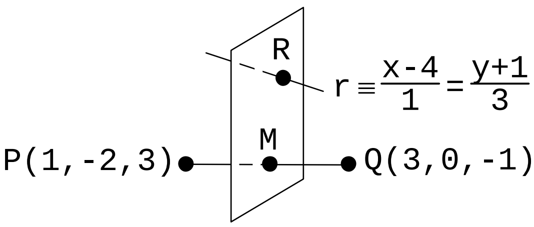
$$d(P,R)=d(Q,R) \Rightarrow \sqrt{(3+\alpha)^2+(1+3\alpha)^2+\alpha^2}=\sqrt{(1+\alpha)^2+(-1+3\alpha)^2+(4+\alpha)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9+6\alpha+\alpha^2+1+6\alpha+9\alpha^2+\alpha^2=1+2\alpha+\alpha^2+1-6\alpha+9\alpha^2+16+8\alpha+\alpha^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10+12\alpha+11\alpha^2=18+4\alpha+11\alpha^2 \Rightarrow 8\alpha=8 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow R(5,2,4)$$

### SEGUNDO MÉTODO:

Si M es el punto medio del segmento PQ: M(2,-1,1).




$$r\equiv\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1} \Rightarrow \begin{cases}x=4+\alpha\\ y=-1+3\alpha\\ z=3+\alpha\end{cases}$$

El plano mediador del segmento PQ (que está formado por todos los puntos que equidistan de P y Q) pasa por M y tiene por vector característico a $\vec{v}=[\overrightarrow{MQ}]=(1,1,-2)$. Por tanto, su ecuación es:

$$x+y-2z+D=0$$

Como M pertenece al plano mediador, satisface su ecuación:

$$2-1-2+D=0 \Rightarrow D=1 \Rightarrow x+y-2z+1=0$$

Al estar el punto R en la recta r:

$$R(4+\alpha,-1+3\alpha,3+\alpha)$$

Como el punto R está en el plano mediador (ya que equidista de P y Q), satisface su ecuación:

$$4+\alpha-1+3\alpha-6-2\alpha+1=0 \Rightarrow 2\alpha=2 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow R(5,2,4)$$

## EXTRAORDINARIO DE 2016. PROBLEMA A3.

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{x^3-2}{x+3}\cdot dx \qquad y \qquad \int \frac{2}{x^3-x}\cdot dx \qquad\qquad \text{(2 PUNTOS)}$$

### PRIMERA INTEGRAL:

$$\int \frac{x^3-2}{x+3}\cdot dx \overset{1}{=} \int\left(x^2-3x+9-\frac{29}{x+3}\right)\cdot dx \overset{2}{=} \frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+9x-29\cdot \ln|x+3|+C$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-2 & x+3 \\ \cline{2-2} -x^3-3x^2 & x^2-3x+9 \\ \cline{1-1} -3x^2-2 & \\ 3x^2+9x & \\ \cline{1-1} 9x-2 & \\ -9x-27 & \\ \cline{1-1} -29 & \end{array}$$

Comprobación:

$$\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+9x-29\cdot \ln|x+3|\right)' = x^2-3x+9-29\cdot\frac{1}{x+3} = \frac{x^3+3x^2-3x^2-9x+9x+27-29}{x+3} = \frac{x^3-2}{x+3}$$

### SEGUNDA INTEGRAL:

Calculamos las raíces del denominador:

$$x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{2}{x^3-x}=\frac{2}{x(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{A(x^2-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1)}{x^3-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2=A(x^2-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=0 \Rightarrow 2=-A \Rightarrow A=-2 \\ \text{Si } x=-1 \Rightarrow 2=2B \Rightarrow B=1 \\ \text{Si } x=1 \Rightarrow 2=2C \Rightarrow C=1 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{2}{x^3-x}\cdot dx = \int \frac{-2}{x}\cdot dx+\int\frac{1}{x+1}\cdot dx+\int\frac{1}{x-1}\cdot dx = -2\cdot\int\frac{1}{x}\cdot dx+\int\frac{1}{x+1}\cdot dx+\int\frac{1}{x-1}\cdot dx \overset{3}{=}$$

$$= -2\cdot \ln|x| + \ln|x+1|+\ln|x-1|+C$$

Comprobación:

$$(-2\cdot\ln|x|+\ln|x+1|+\ln|x-1|)' = -2\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=$$

$$=\frac{-2(x^2-1)+x(x-1)+x(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{-2x^2+2+x^2-x+x^2+x}{x(x^2-1)}=\frac{2}{x^3-x}$$

---

[1] Hacemos primero la división. Esta integral también puede hacerse con el cambio de variable x+3=t.

[2] Las tres primeras integrales son inmediatas de tipo potencial y la última, casi inmediatas de tipo logarítmico.

[3] La primera integral es inmediata de tipo logarítmico y las dos últimas, casi inmediatas del mismo tipo.

## EXTRAORDINARIO DE 2016. PROBLEMA A4.

Demuestra que existe $\alpha\in(1,\sqrt{2})$ tal que $f'(\alpha)=1$, siendo $f(x)=\ln \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot x^2\right)$. (3 PUNTOS)

Primero derivamos la función:

$$f'(x)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot x^2\right)'}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot x^2\right)}=\frac{\frac{\pi}{4}\cdot 2x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot x^2\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot x^2\right)}=\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\cdot x^2\right)$$

Además, $[1,\sqrt{2}]\subset\operatorname{Dom}(f)$ y $[1,\sqrt{2}]\subset\operatorname{Dom}(f')$:

$$1\le x\le\sqrt{2}\ \Rightarrow\ 1\le x^2\le 2\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}\cdot x^2\le\frac{\pi}{2}$$

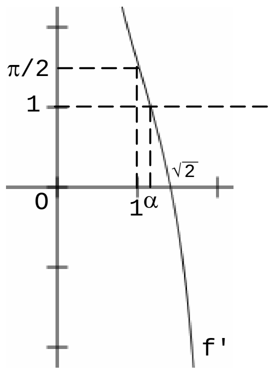
* * *

Como la función f' satisface las condiciones de la propiedad de Darboux,[1] existe $\alpha$ en el intervalo abierto $(1,\sqrt{2})$ tal que $f'(\alpha)=1$.

En efecto:

**1ª)** $f'(1)>1>f'(\sqrt{2})$:

- $f'(1)=\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}>1$.
- $f'(\sqrt{2})=\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 0=0<1$.




**2ª)** f' es continua en $[1,\sqrt{2}]$:

- $[1,\sqrt{2}]\subset\operatorname{Dom}(f')$
- Si $a\in[1,\sqrt{2}]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\left[\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\cdot x^2\right)\right]=\frac{\pi}{2}\cdot a\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\cdot a^2\right)=f'(a)$$

[1] Se puede también aplicar el teorema de Bolzano a la función auxiliar $g(x)=f'(x)-1$. Si lo intentas, verás que no puede aplicarse a la función f el teorema de Lagrange.

## EXTRAORDINARIO DE 2016. PROBLEMA B1.

Encuentra todas las matrices B que cumplen $A\cdot B=B\cdot A$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$ (2 puntos)

Evidentemente, B es una matriz cuadrada de orden dos:

$$B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A\cdot B=B\cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x+z & y+t\\ x+2z & y+2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y & x+2y\\ z+t & z+2t\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+z=x+y\\ y+t=x+2y\\ x+2z=z+t\\ y+2t=z+2t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y-z=0\\ x+y-t=0\\ x+z-t=0\\ y-z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=z\\ x+z-t=0\\ x+z-t=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=z\\ x=t-z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=b-a\\ y=a\\ z=a\\ t=b\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix}b-a & a\\ a & b\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b-a & a\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & a+b\\ a+b & a+2b\end{pmatrix} \qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}b-a & a\\ a & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & a+b\\ a+b & a+2b\end{pmatrix}$$

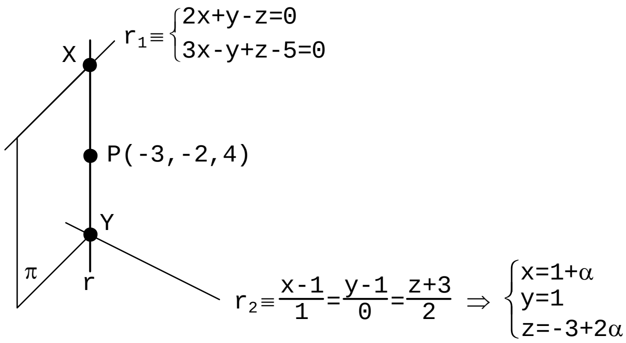
## EXTRAORDINARIO DE 2016. PROBLEMA B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto P(-3,-2,4) y corta a las rectas

$$r_1\equiv\begin{cases}2x+y-z=0\\3x-y+z-5=0\end{cases} \qquad y \qquad r_2\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+3}{2}$$

(3 PUNTOS)

Sean X e Y los puntos de corte de la recta r con $r_1$ y $r_2$, respectivamente:[1]




El punto P y la recta $r_1$ determinan el plano $\pi$. Como este plano pertenece al haz de planos de arista la recta $r_1$, tiene por ecuación:[2]

$$\pi\equiv a(2x+y-z)+b(3x-y+z-5)=0$$

Como el punto P(-3,-2,4) está en el plano $\pi$, satisface su ecuación:

$$a(-6-2-4)+b(-9+2+4-5)=0 \Rightarrow -12a-8b=0 \Rightarrow b=-3a/2$$

Por tanto:

$$a(2x+y-z)-\frac{3a}{2}\cdot(3x-y+z-5)=0 \Rightarrow 2a(2x+y-z)-3a(3x-y+z-5)=0 \overset{3}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 4x+2y-2z-9x+3y-3z+15=0 \Rightarrow -5x+5y-5z+15=0 \Rightarrow \pi\equiv x-y+z-3=0$$

Como el punto Y está en la recta $r_2$:

$$Y(1+\alpha,1,-3+2\alpha)$$

Como el punto Y está en el plano $\pi$, satisface su ecuación:

$$1+\alpha-1-3+2\alpha-3=0 \Rightarrow 3\alpha-6=0 \Rightarrow 3\alpha=6 \Rightarrow \alpha=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(3,1,1) \Rightarrow [\overrightarrow{PY}]=(6,3,-3)=3\cdot(2,1,-1) \Rightarrow r\equiv\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{-1}$$

---

[1] Otras formas de hacer este ejercicio pueden verse, por ejemplo, en el problema B2 del examen de selectividad de junio de 2007.

[2] Otra forma de obtener la ecuación de este plano consiste en hallar un punto y un vector direccional de la recta $r_1$.

[3] Como $a\neq 0$, podemos dividir los dos miembros por a. (Si a fuese 0, entonces b también valdría 0, ya que $b=-3a/2$; pero a y b no pueden ser simultáneamente nulos.)

## EXTRAORDINARIO DE 2016. PROBLEMA B3.

Demuestra que existe $\alpha\in(-1,1)$ tal que $f'(\alpha)=1/2$, siendo

$$f(x)=\frac{\sqrt[4]{2^{x^2+3x+3}+3\cdot 2^{x+1}+4}}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$ (2 Puntos)

Como $g(x)=2^{x^2+3x+3}+3\cdot 2^{x+1}+4>0$ y $h(x)=x^4+x^2+1>0$, entonces $Dom(f)=R$:

- Una función exponencial es siempre positiva.
- $x^4+x^2+1=0 \Rightarrow x^2=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$.

Al ser $f=g^{1/4}:h^{1/2}$, su derivada es la siguiente:[1]

$$f'=\frac{(1/4)\cdot g^{-3/4}\cdot g'\cdot h^{1/2}-(1/2)\cdot h^{-1/2}\cdot h'\cdot g^{1/4}}{h}\overset{2}{=}\frac{g'\cdot h-2\cdot h'\cdot g}{4\cdot g^{3/4}\cdot h^{3/2}}$$

Como, $Dom(g')=Dom(h')=R$, $g>0$ y $h>0$, también $Dom(f')=R$:

- $g'=(2x+3)\cdot 2^{x^2+3x+3}\cdot \ln 2+3\cdot 2^{x+1}\cdot \ln 2$
- $h'=4x^3+2x$

Por otro lado:

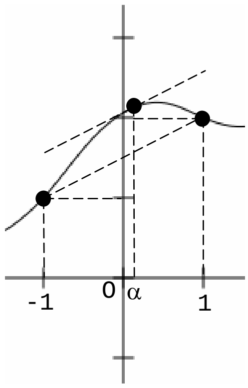
$$f(-1)=\frac{\sqrt[4]{2+3+4}}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$$

$$f(1)=\frac{\sqrt[4]{128+12+4}}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{\sqrt[4]{144}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{4}=2$$

* * *

Como la función f satisface en el intervalo [-1,1] las condiciones del teorema de Lagrange, existe $\alpha$ en (-1,1) tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$




En efecto:

**1ª)** f es continua en [-1,1] por ser derivable en R.

**2ª)** f es derivable en (-1,1) por serlo en R.

[1] Podemos reducir la derivada de la función a la de sus elementos.

[2] Multiplicamos numerador y denominador por $4\cdot g^{3/4}\cdot h^{1/2}$.

## EXTRAORDINARIO DE 2016. PROBLEMA B4.

Dadas las funciones $f(x)=x^3-x$ y $g(x)=2x^3-2x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 Puntos)

**1º)** Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x^3-x \\ y=2x^3-2x \end{cases} \Rightarrow x^3-x=2x^3-2x \Rightarrow x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

**2º)** Averiguamos entre -1 y 0 y entre 0 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

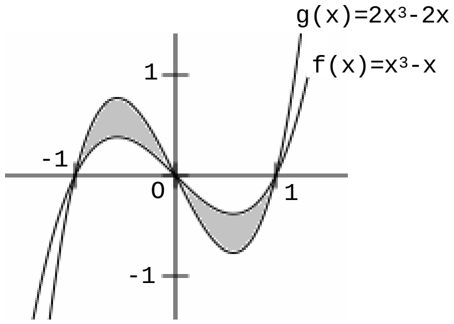
| x | f(x) | g(x) |
|---|---|---|
| -1/2 | 3/8 | 3/4 |
| 1/2 | -3/8 | -3/4 |

**3º)** Calculamos el área:[1]

$$A=\int_{-1}^{0}(2x^3-2x-x^3+x)\cdot dx+\int_{0}^{1}(x^3-x-2x^3-2x)\cdot dx =$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\cdot dx+\int_{0}^{1}(x-x^3)\cdot dx =\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} =$$

$$=\left[0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-0\right]=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$




[1] Como las dos funciones son impares, podría calcularse sólo una de las integrales y multiplicar el resultado por dos.