1) (1p) Define producto de un número real por una matriz. Enuncia sus propiedades.

2) (1p) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius.

3) (1p) Define matriz inversible.

4) (1p) Demuestra que si A y B son inversibles, $A\cdot B$ también lo es y que $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

5) (2p) Discute y resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x+(1+a)y+2z=3 \\ x+y+az=1 \end{array}\right\}$$

6) (2p) Dada la matriz A, calcula A^n:

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

7) (2p) Halla la inversa de la matriz A y comprueba el resultado:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5: Discute y resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x+(1+a)y+2z=3 \\ x+y+az=1 \end{array}\right\}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1+a & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & -1 \end{array}\right) \overset{2}{\rightarrow} \begin{cases} a=0 \\ a-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-y-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=1 \end{cases}$$

2º) Si a=1, el sistema es incompatible:[4]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ ay+z=1 \\ (a-1)z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=\frac{-1}{a-1}} \Rightarrow ay=1-z=1+\frac{1}{a-1}=\frac{a-1+1}{a-1}=\frac{a}{a-1} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{a-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2-y-z=2-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-1}=2 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

---

[1] 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.

[2] Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

[3] 3ªf+2ªf.

[4] Ya que la última ecuación es incompatible.

Ejercicio 6: *Dada la matriz A, calcula A^n:*

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2 & 2x & 2x \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x^2 & 2x & 2x \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x^2 \\ 0 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x^2 \\ 0 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^4 & 4x^3 & 4x^3 \\ 0 & x^4 & 0 \\ 0 & 0 & x^4 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^n=\begin{pmatrix} x^n & nx^{n-1} & nx^{n-1} \\ 0 & x^n & 0 \\ 0 & 0 & x^n \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7: *Halla la inversa de la matriz A y comprueba el resultado:*

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$ (2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 6 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{3}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0\\ 0+0+0 & 3-2+0 & -3+3+0\\ 0+0+0 & 2-2+0 & -2+3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

---

1 1ªf↔3ªf.
2 2ªf·2.
3 2ªf-3·1ªf.
4 1ªf+2ªf.
5 1ªf·1/2; 2ªf·(-1).