

1) (1p) Define rango de una matriz.

2) (1p) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius.

3) (1p) Demuestra que $[\alpha \cdot A]' = \alpha \cdot A'$.

4) (1p) Demuestra que si A y B son inversibles, $A \cdot B$ también lo es y que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

5) (2p) Discute y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} ax+y+z=a^2 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=1 \end{cases}$$

6) (2p) Elimina los parámetros:

$$\begin{cases} x=1-a+3b \\ y=2a+b \\ z=3-b \\ t=1-a+b \end{cases}$$

7) (2p) Dadas las matrices A y B, calcula $(A \cdot B)^{-1}$ y $(A \cdot B)^n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5: Discute y resuelve el sistema:

$$\begin{cases} ax+y+z=a^2 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=1 \end{cases}$$

* * *

(2 PUNTOS)

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{array}\right) \stackrel{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array}\right) \stackrel{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & a^2-1 \end{array}\right) \stackrel{4}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ a^2+a-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=\frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=-2$, el sistema es incompatible:⁵

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

2º) Si $a=1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & -(a-1) & a-1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & (a-1)(a+1) \end{array}\right) \stackrel{6}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+2) & (a+1) \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+y+az=1 \\ y-z=1 \\ -(a+2)z=a+1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z=-\frac{a+1}{a+2}} \Rightarrow y=1+z=1-\frac{a+1}{a+2}=\frac{a+2-a-1}{a+2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{a+2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-y-az=1-\frac{1}{a+2}+\frac{a^2+a}{a+2}=\frac{a+2-1+a^2+a}{a+2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{(a+1)^2}{a+2}}$$

¹ $1af \leftrightarrow 3af$.

² $2af-1af$; $3af-a \cdot 1af$.

³ $3af+2af$.

⁴ Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

⁵ Ya que la última ecuación es incompatible.

⁶ Como $a \neq 1$, podemos dividir las dos últimas filas por $a-1$.

Ejercicio 6: Elimina los parámetros:

$$\begin{cases} x=1-a+3b \\ y=2a+b \\ z=3-b \\ t=1-a+b \end{cases}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{cases} -a+3b=x-1 \\ 2a+b=y \\ -b=z-3 \\ -a+b=t-1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & x-1 \\ 2 & 1 & y \\ 0 & -1 & z-3 \\ -1 & 1 & t-1 \end{array} \right) \stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & x-1 \\ 0 & 7 & 2x+y-2 \\ 0 & -1 & z-3 \\ 0 & -2 & -x+t \end{array} \right) \stackrel{2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & x-1 \\ 0 & -1 & z-3 \\ 0 & 7 & 2x+y-2 \\ 0 & -2 & -x+t \end{array} \right) \stackrel{3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & x-1 \\ 0 & -1 & z-3 \\ 0 & 0 & 2x+y+7z-23 \\ 0 & 0 & -x-2z+t+6 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 2x+y+7z-23=0 \\ -x-2z+t+6=0 \end{cases}$$

¹ $2^a f + 2 \cdot 1^a f$; $4^a f - 1^a f$.

² $2^a f \leftrightarrow 3^a f$.

³ $3^a f + 7 \cdot 2^a f$; $4^a f - 2 \cdot 2^a f$.

Ejercicio 7: Dadas las matrices A y B, calcula $(A \cdot B)^{-1}$ y $(A \cdot B)^n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Calculamos $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2º) Hallamos la inversa de $A \cdot B$ por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 1-1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3º) Calculamos $(A \cdot B)^n$:

$$(A \cdot B)^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$(A \cdot B)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$