JUNIO DE 2016. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+2y+2z=1 \\ x+(a+1)y-z=1 \\ -2x-(2a+2)y+(a^2-2)z=a \end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 & 1 \\ -2 & -2a-2 & a^2-2 & a \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & -3 & 0 \\ 0 & -2(a-1) & a^2+2 & a+2 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{a-1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a^2-4} & a+2 \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ a^2-4=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-2, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+2y+2z=1 \\ -3y-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2y-2z=1+2z-2z=1 \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

2º) Si a=1, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

3º) Si a=2, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+2z=1 \\ (a-1)y-3z=0 \\ (a^2-4)z=a+2 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{a+2}{(a-2)(a+2)} \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{a-2}} \Rightarrow (a-1)y=3z=\frac{3}{a-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{3}{(a-1)(a-2)}} \Rightarrow x=1-2y-2z=1-\frac{6}{(a-1)(a-2)}-\frac{2}{a-2}=$$

$$=\frac{(a-1)(a-2)-6-2(a-1)}{(a-1)(a-2)}=\frac{a^2-2a-a+2-6-2a+2}{(a-1)(a-2)} \Rightarrow \boxed{x=\frac{a^2-5a-2}{(a-1)(a-2)}}$$

---

1 2ªf-1ªf; 3ªf+2·1ªf.

2 3ªf+2·2ªf.

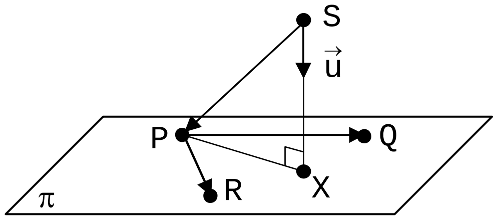
3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).

4 3ªf-2ªf.

JUNIO DE 2016. PROBLEMA A2.

Se considera el plano π que pasa por los puntos P(1,1,3), Q(2,1,0) y R(-1,-4,-1). Encuentra el punto de π que más cerca está del punto S(-3,1,1) (o sea, el pie de la perpendicular de S a π). (2 PUNTOS)

Sea X(x,y,z) el pie de la perpendicular trazada de S a π:



Multipliquemos vectorialmente $\overrightarrow{PQ}=(1,0,-3)$ y $\overrightarrow{PR}=(-2,-5,-4)$:

$$\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -5 & -4 \end{vmatrix}=-15\vec{i}+10\vec{j}-5\vec{k}=-5(3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})$$

A continuación puede seguirse uno de los dos siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

El vector $\vec{u}=(3,-2,1)$ es un vector perpendicular al plano π. Por tanto, la ecuación de dicho plano es $3x-2y+z+D=0$.

Y como el punto P(1,1,3) es un punto de π, satisface su ecuación:

$$3-2+3+D=0 \Rightarrow D=-4 \Rightarrow \pi\equiv 3x-2y+z-4=0$$

La recta que pasa por el punto S(-3,1,1) y corta perpendicularmente al plano π en el punto X tiene a $\vec{u}$ por vector direccional. Por tanto su ecuación es:

$$SX\equiv\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$$

Como X es un punto de esta recta, $X(-3+3\alpha,1-2\alpha,1+\alpha)$.

Y como X es también un punto del plano π, satisface su ecuación:

$$3(-3+3\alpha)-2(1-2\alpha)+1+\alpha-4=0 \Rightarrow -9+9\alpha-2+4\alpha+1+\alpha-4=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14\alpha=14 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow X(0,-1,2)$$

SEGUNDO MÉTODO:

Como el vector $\overrightarrow{SX}$ es la proyección del vector $\overrightarrow{SP}=(4,0,2)$ sobre el vector $\vec{u}=(3,-2,1)$:

$$\overrightarrow{SX}=\frac{\overrightarrow{SP}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot\vec{u}=\frac{4\cdot 3+0\cdot(-2)+2\cdot 1}{9+4+1}\cdot\vec{u}=\frac{14}{14}\cdot\vec{u}=\vec{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+3,y-1,z-1)=(3,-2,1) \Rightarrow \begin{cases} x+3=3 \\ y-1=-2 \\ z-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow X(0,-1,2)$$

JUNIO DE 2016. PROBLEMA A3.

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot \text{tg}\,x}{1-\cos(2x)} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1} x^{\frac{x}{\text{sen}(\pi x)}}$$ (2 PUNTOS)

PRIMER LÍMITE:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot \text{tg}\,x}{1-\cos(2x)} \overset{1}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\,x+x(1+\text{tg}^2x)}{2\cdot \text{sen}(2x)} \overset{1}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\text{tg}^2x+1+\text{tg}^2x+x\cdot 2\cdot \text{tg}\,x\cdot(1+\text{tg}^2x)}{2\cdot 2\cdot \cos(2x)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

* * *

Si se conocen los infinitésimos equivalentes, se puede proceder como sigue:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot \text{tg}\,x}{1-\cos(2x)} \overset{2}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2\cdot x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

SEGUNDO LÍMITE:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{x}{\text{sen}(\pi x)}} \overset{3}{=} e^{\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x}{\text{sen}(\pi x)}\cdot(x-1)\right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{\text{sen}(\pi x)}} \overset{1}{=} e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-1}{\pi\cdot\cos(\pi x)}} = e^{-1/\pi}$$

---

[1] Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.

[2] Ya que, en $x=0$, $\text{tg}\,x \sim x$; y como $2x$ es un infinitésimo en $x=0$, $1-\cos(2x) \sim (2x)^2/2 = 4x^2/2 = 2x^2$.

[3] Como sale la indeterminación 1^∞, podemos dar este paso.

JUNIO DE 2016. PROBLEMA A4.

Dadas las funciones $f(x)=|x-1|-1$ y $g(x)=\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$, encuentra los dos puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 PUNTOS)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo la región cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=|x-1|-1 \\ y=\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right) \end{cases} \Rightarrow |x-1|-1=\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right) \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre 0 y 2 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	f(x)	g(x)
1	-1	1

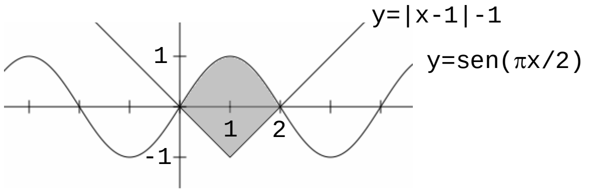
3º) Calculamos el área:

$$A=\int_0^2 \left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-|x-1|+1\right]\cdot dx \overset{2}{=}$$

$$=\int_0^1 \left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)+x\right]\cdot dx + \int_1^2 \left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-x+2\right]\cdot dx \overset{3}{=}$$

$$=\left[-\frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2 =$$

$$=\left[\left(0+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{2}{\pi}+0\right)\right]+\left[\left(\frac{2}{\pi}-2+4\right)-\left(0-\frac{1}{2}+2\right)\right]=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2}=1+\frac{4}{\pi}=\frac{4+\pi}{\pi}$$



[1] Esta ecuación se resuelve a ojo.
[2] Como |x-1|=1-x si x<1 y |x-1|=x-1 si x>1, descomponemos la integral en dos.
[3] Calculamos la correspondiente integral indefinida directamente. La integral de las funciones polinómicas son inmediatas de tipo potencial y la de la función trigonométrica, casi inmediata de tipo coseno.

Junio de 2016. Problema B1.

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, calcula A^{57} y A^{-68}. (2 Puntos)

Calculamos las primeras potencias de A:

- $A^1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.
- $A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$
- $A^3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$
- $A^4=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$

Por tanto:

$$A^n=\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ (-1)^{n+1}\cdot n & (-1)^n\end{pmatrix}=(-1)^n\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -n & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{57}=(-1)^{57}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -57 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 57 & -1\end{pmatrix}$$

Calculamos A^{68} y su determinante:

$$A^{68}=(-1)^{68}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -68 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -68 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow |A^{68}|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -68 & 1\end{vmatrix}=1$$

Como A^{-68} es la inversa de A^{68}:

$$A^{68}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -68 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{1} (A^{68})^*=\begin{pmatrix}1 & 68\\ 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{2} [(A^{68})^*]'=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 68 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{3} A^{-68}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 68 & 1\end{pmatrix}$$

* * *

Otra forma de hacer este último cálculo consiste en hallar A^{-1} y repetir con esta matriz lo hecho con la matriz A.

1 Calculamos la adjunta de A^{68}.
2 Calculamos la traspuesta de la adjunta de A^{68}.
3 Ya que $|A^{68}|=1$.

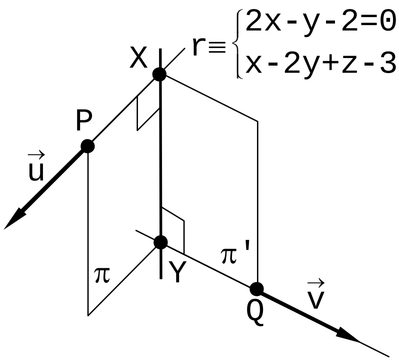
JUNIO DE 2016. PROBLEMA B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a

$$r\equiv\begin{cases}2x-y-2=0\\x-2y+z-3=0\end{cases} \quad y \quad s\equiv\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+2}{1}$$

(3 PUNTOS)

Sean X e Y los puntos de corte de la recta que buscamos y las rectas r y s, respectivamente:



$$s\equiv\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+2}{1}\ \rightarrow\ \begin{cases}Q(2,4,-2)\\ \vec{v}(2,-1,1)\end{cases}$$

Hallamos primero las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases}2x-y-2=0\\x-2y+z-3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=-2+2x\\z=3-x+2y=3-x-4+4x=-1+3x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\alpha\\y=-2+2\alpha\\z=-1+3\alpha\end{cases} \rightarrow \begin{cases}P(0,-2,-1)\\ \vec{u}(1,2,3)\end{cases}$$

A continuación puede seguirse uno de los dos siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Por estar el punto X en la recta r: $X(\alpha,-2+2\alpha,-1+3\alpha)$.

Por estar el punto Y en la recta s: $Y(2+2\beta,4-\beta,-2+\beta)$.

Por tanto: $[\overrightarrow{XY}]=(2+2\beta-\alpha,6-\beta-2\alpha,-1+\beta-3\alpha)$.

Como $[\overrightarrow{XY}]$ es perpendicular a $\vec{u}(1,2,3)$ y a $\vec{v}(2,-1,1)$:

$$\begin{cases}[\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{u}=0\\ [\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{v}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2+2\beta-\alpha+12-2\beta-4\alpha-3+3\beta-9\alpha=0\\4+4\beta-2\alpha-6+\beta+2\alpha-1+\beta-3\alpha=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3\beta-14\alpha=-11\\6\beta-3\alpha=3\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3\beta-14\alpha=-11\\ \alpha=2\beta-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3\beta-28\beta+14=-11\\ \alpha=2\beta-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}25\beta=25\\ \alpha=2\beta-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=1\\ \alpha=1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases}X(1,0,2)\\Y(4,3,-1)\end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{XY}]=(3,3,-3) \Rightarrow XY\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$$

---

[1] Si resultara que los puntos X e Y coinciden, eso significaría que las rectas r y s se cortan en dicho punto. En ese caso, la recta buscada pasa por ese punto y tiene por vector direccional el producto vectorial de los vectores direccionales de las rectas r y s.

SEGUNDO MÉTODO:

Como los vectores $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(2,-1,1)$ son perpendiculares a la recta que buscamos, un vector direccional de ésta es:

$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=5\vec{i}+5\vec{j}-5\vec{k}=5(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$$

Por tanto, la ecuación del plano π, que está determinado por el punto P, el vector $\vec{u}$ y un vector direccional de la recta XY, es:

$$\begin{vmatrix}x & y+2 & z+1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -5x+4(y+2)-(z+1)=0 \Rightarrow -5x+4y+8-z-1=0 \Rightarrow 5x-4y+z=7$$

Como el punto Y está en la recta s[1]: $Y(2+2\beta,4-\beta,-2+\beta)$.

Como el punto Y está en el plano π, satisface su ecuación:

$$5(2+2\beta)-4(4-\beta)-2+\beta=7 \Rightarrow 10+10\beta-16+4\beta-2+\beta=7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 15\beta=15 \Rightarrow \beta=1 \Rightarrow Y(4,3,-1)$$

Por tanto, la recta buscada es:

$$XY\equiv\frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

---

[1] En lugar de lo que sigue, se podría calcular la ecuación del plano π'. Entonces la recta XY sería la intersección de los planos π y π'.

Junio de 2016. Problema B3.

Halla las asíntotas de la función:

$$y=\frac{4x^2-1}{2x+4}$$ (2 Puntos)

1º) El dominio de la función es $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

2º) La recta $x=-2$ es asíntota vertical de la función:

- $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} y = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \frac{4x^2-1}{2x+4} = \frac{15}{0^-} = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} y = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \frac{4x^2-1}{2x+4} = \frac{15}{0^+} = +\infty$

3º) La recta $y=2x-4$ es asíntota oblicua de la función en $+\infty$ y $-\infty$:

Primer método:

- $k= \lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2-1}{2x+4} \overset{1}{=} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (2x) = \pm\infty$
- $m= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2-1}{2x^2+4x} \overset{2}{=} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 2 = 2$
- $b= \lim\limits_{x\to\pm\infty} [y-mx] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4x^2-1}{2x+4}-2x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2-1-4x^2-8x}{2x+4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-8x-1}{2x+4} =$

$$\overset{3}{=} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-8x}{2x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (-4) = -4$$

Segundo método:

Como se trata de una función racional (cociente de polinomios), puede hallarse la asíntota oblicua del siguiente modo:

$$\begin{array}{r|l} 4x^2-1 & 2x+4 \\ \cline{2-2} -4x^2-8x & 2x-4 \\ \hline -8x-1 & \\ 8x+16 & \\ \hline 15 & \end{array}$$

$$y=\frac{4x^2-1}{2x+4} = 2x-4+\frac{15}{2x+4} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} [y-(2x-4)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{15}{2x+4} = \frac{15}{\pm\infty} = 0$$

---

1 $4x^2-1\sim4x^2$ y $2x+4\sim2x$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando factor común la máxima potencia de x en el numerador y en el denominador, simplificando a continuación. O por L'Hôpital. O haciendo la división. Incluso directamente. Lo mismo puede decirse de los dos límites siguientes.

2 $4x^2-1\sim4x^2$ y $2x^2+4x\sim2x^2$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

3 $-8x-1\sim-8x$ y $2x+4\sim2x$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

JUNIO DE 2016. PROBLEMA B4.

Dada la función f, demuestra que existe un valor $\alpha\in(-1,1)$ tal que $f'(\alpha)=2$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso:

$$f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x^2\right)\cdot e^{x^2}$$ (3 PUNTOS)

Primero derivamos la función:

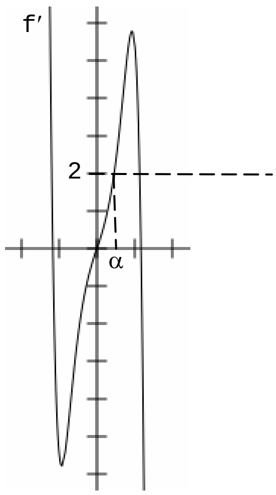
$$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cdot 2x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x^2\right)\cdot e^{x^2}+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x^2\right)\cdot 2x\cdot e^{x^2}=$$

$$=\pi x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x^2\right)\cdot e^{x^2}+2x\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x^2\right)\cdot e^{x^2}$$

* * *

Como la función f' satisface las condiciones de la propiedad de Darboux,[1] existe α en el intervalo abierto (-1,1) tal que $f'(\alpha)=2$.

En efecto:



1ª) $f'(-1)<2<f'(1)$:

- $f'(-1)=-\pi\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot e-2\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot e=-2e<2$.
- $f'(1)=\pi\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot e+2\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot e=2e>2$.

2ª) f' es continua en [-1,1]:

- $[-1,1]\subset\operatorname{Dom}(f')=\operatorname{Dom}(f)=\mathbb{R}$.
- Si $a\in[-1,1]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\left[\pi x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x^2\right)\cdot e^{x^2}+2x\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x^2\right)\cdot e^{x^2}\right]=$$

$$=\pi a\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot a^2\right)\cdot e^{a^2}+2a\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot a^2\right)\cdot e^{a^2}=f'(a)$$

[1] Se puede también aplicar el teorema de Bolzano a la función auxiliar g(x)=f'(x)-2. Si lo intentas, verás que no puede aplicarse a la función f el teorema de Lagrange.