**EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2019. PROBLEMA A1.**
Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real $a$ y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases}(a+1)x-y+(1-a)z=a+1\\(-a-1)x+(a+1)y+(a^2+a-2)z=-1\\(a+1)x-(a+1)y+(1-a^2)z=0\end{cases}$$

(3 puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a+1&-1&1-a&a+1\\-a-1&a+1&a^2+a-2&-1\\a+1&-a-1&1-a^2&0\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}a+1&-1&1-a&a+1\\0&a&a^2-1&a\\0&-a&a-a^2&-a-1\end{array}\right)\overset{2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}a+1&-1&1-a&a+1\\0&a&a^2-1&a\\0&0&a-1&-1\end{array}\right)\overset{3}{\rightarrow}\begin{cases}a+1=0\Rightarrow a=-1\\a=0\\a-1=0\Rightarrow a=1\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=-1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&2&0\\0&-1&0&-1\\0&0&-2&-1\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&2&0\\0&0&-2&-1\\0&0&-2&-1\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&2&0\\0&0&-2&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}-y+2z=0\\-2z=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2z=1\\z=1/2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=1\\z=1/2\end{cases}$$

2º) Si $a=0$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&0&-1&0\\0&0&-1&-1\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right)$$

3º) Si $a=1$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&0&2\\0&1&0&1\\0&0&0&-1\end{array}\right)$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases}(a+1)x-y+(1-a)z=a+1\\ay+(a^2-1)z=a\\(a-1)z=-1\end{cases}\Rightarrow\boxed{z=\frac{-1}{a-1}}\Rightarrow ay=a-(a-1)(a+1)\frac{-1}{a-1}=a+a+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{y=\frac{2a+1}{a}}\Rightarrow(a+1)x=a+1+\frac{2a+1}{a}+(a-1)\frac{-1}{a-1}=\frac{a^2+2a+1}{a}=\frac{(a+1)^2}{a}\Rightarrow\boxed{x=\frac{a+1}{a}}$$

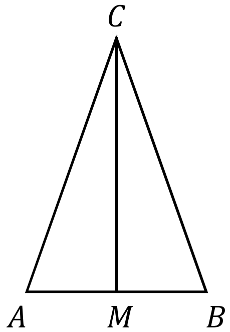
---

[1] 2ª$f$ + 1ª$f$; 3ª$f$ − 1ª$f$.
[2] 3ª$f$ + 2ª$f$.
[3] Como no se puede dividir por 0, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).
[4] 2ª$f$ − 1ª$f$.
[5] 3ª$f$ − 2ª$f$.

**EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2019. PROBLEMA A2.**
Los puntos $A(2,-3,2)$ y $B(0,1,-2)$ determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta $r$. Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo es $18\ u^2$:

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{-2}$$ (2 puntos)

Si $C$ es el tercer vértice del triángulo, como pertenece a la recta $r$, $C(3+2\alpha, 4-\alpha, 4-2\alpha)$.




Y al equidistar de los otros dos vértices del triángulo:

$$d(A,C) = d(B,C) \Rightarrow \sqrt{(1+2\alpha)^2 + (7-\alpha)^2 + (2-2\alpha)^2} = \sqrt{(3+2\alpha)^2 + (3-\alpha)^2 + (6-2\alpha)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 4\alpha + 4\alpha^2 + 49 - 14\alpha + \alpha^2 + 4 - 8\alpha + 4\alpha^2 = 9 + 12\alpha + 4\alpha^2 + 9 - 6\alpha + \alpha^2 + 36 - 24\alpha + 4\alpha^2 \Rightarrow$$

$$9\alpha^2 - 18\alpha + 54 = 9\alpha^2 - 18\alpha + 54$$

Pero esto significa que todos los puntos de la recta $r$ equidistan de $A$ y $B$.[1]

Ahora bien, la longitud de la base del triángulo es:

$$d(A,B) = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

Y como su área es 18, su altura mide 6. Pero la altura es el segmento $CM$, donde $M$ es el punto medio del segmento $AB$:

$$M(1,-1,0)$$

Por tanto:[2]

$$d(C,M) = 6 \Rightarrow \sqrt{(2+2\alpha)^2 + (5-\alpha)^2 + (4-2\alpha)^2} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 8\alpha + 4\alpha^2 + 25 - 10\alpha + \alpha^2 + 16 - 16\alpha + 4\alpha^2 = 36 \Rightarrow 9\alpha^2 - 18\alpha + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow (\alpha-1)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow C(5,3,2)$$

[1] Eso sucede por estar la recta $r$ en el plano mediador del segmento $AB$, o sea, el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de $A$ y $B$, esto es, en el plano perpendicular a ese segmento en su punto medio.

[2] Otra forma de abordar el problema consiste en hallar el plano mediador del segmento $AB$ y calcular su intersección con la recta $r$. Pero al hacerlo resulta que todos los puntos de la recta están en ese plano, pues satisfacen su ecuación, lo que nos obliga a terminar el problema de la misma manera que antes. También podría calcularse primero el punto $C$ como hemos hecho al final del ejercicio y comprobar luego que equidista de $A$ y $B$.

**EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2019. PROBLEMA A3.**
Dada la función $f$, demuestra que existe $\alpha \in (1, e)$ tal que $f'(\alpha) = e + 1$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso:

$$f(x) = (x + ex - e)^{e/x}$$ (2 puntos)

Como la función $f$ satisface las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo $[1, e]$, existe $\alpha \in (1, e)$ tal que:

$$f'(\alpha) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{(e + e^2 - e)^1 - (1 + e - e)^e}{e - 1} = \frac{e^2 - 1}{e - 1} = \frac{(e + 1)(e - 1)}{e - 1} = e + 1$$

En efecto:

1ª) La función $f$ es continua en el intervalo cerrado $[1, e]$:

- $Dom(f) = \left(\frac{e}{1+e}, +\infty\right)$:

$$x + ex - e > 0 \Leftrightarrow x(1 + e) > e \Leftrightarrow x > \frac{e}{1 + e}$$

- $[1, e] \subset Dom(f)$, ya que $\frac{e}{1+e} < 1$.
- La función $f$ es continua en su dominio por ser derivable en él:

$$f(x) = (x + ex - e)^{e/x} \overset{1}{\Rightarrow} \ln f(x) = \frac{e}{x} \cdot \ln(x + ex - e) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-e}{x^2} \cdot \ln(x + ex - e) + \frac{e}{x} \cdot \frac{1 + e}{x + ex - e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; f'(x) = \left[\frac{-e \cdot \ln(x + ex - e)}{x^2} + \frac{e(1 + e)}{x(x + ex - e)}\right] \cdot (x + ex - e)^{e/x}$$

2ª) La función $f$ es derivable en el intervalo abierto $(1, e)$ por ser derivable en su dominio.

[1] Aplicamos el método de derivación logarítmica.

**EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2019. PROBLEMA A4.**

Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f$ y $g$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas:

$$f(x) = 1 + \cos x \qquad\qquad g(x) = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2 \qquad\qquad \text{(3 puntos)}$$

1º) Hallamos primero los tres puntos de corte de ambas gráficas:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 + \cos x = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2 \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = -\pi \end{cases}$$

2º) Averiguamos la posición relativa de ambas gráficas en los intervalos $(-\pi, 0)$ y $(0, \pi)$:

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|
| $-\pi/2$ | 1 | $3/2$ |
| $\pi/2$ | 1 | $3/2$ |

3º) Calculamos el área:

$$A \overset{2}{=} 2\int_0^\pi [g(x) - f(x)] \cdot dx = 2\int_0^\pi \left[\left(\frac{-2x^2}{\pi^2} + 2\right) - (1 + \cos x)\right] \cdot dx =$$

$$= 2\int_0^\pi \left(-\frac{2}{\pi^2} \cdot x^2 + 1 - \cos x\right) \cdot dx = 2\left[-\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{x^3}{3} + x - \operatorname{sen} x\right]_0^\pi = 2\left[-\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^3}{3} + \pi - \operatorname{sen} \pi\right] =$$

$$= 2\left[-\frac{2\pi}{3} + \pi\right] = \frac{2\pi}{3}$$

[1] Las soluciones se obtienen a ojo.
[2] Ya que las funciones $f$ y $g$ son pares; y, por tanto, también $g - f$.

**EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2019. PROBLEMA B1.**

Calcula los valores del parámetro $t$ para que se cumpla la condición $|A \cdot B| = |A + B|$, siendo $A$ y $B$ las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

$$|A \cdot B| = |A + B| \Rightarrow |A| \cdot |B| = |A + B| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 0 & t-1 \\ t+1 & 0 & 2t+1 \\ t+2 & 0 & t+2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(t+1)(t-1) \cdot t \cdot \begin{vmatrix} t & t+1 \\ t-1 & t+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t^2(t+1)(t-1)(t^2+t-t^2+1) = 0 \Rightarrow$$

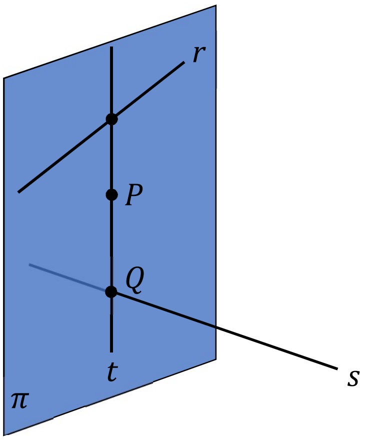
$$\Rightarrow t^2(t+1)^2(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

**EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2019. PROBLEMA B2.**
Calcula la ecuación continua de la recta $t$ sabiendo que pasa por el punto $P(1,-2,-1)$ y que corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x+y-z-1=0 \\ 3y-2z+3=0 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

(3 puntos)

Sea $\pi$ el plano que definen las rectas secantes $r$ y $t$:




Como el plano $\pi$ contiene a la recta $r$, pertenece al haz de planos de arista la recta $r$:

$$\pi \equiv \alpha(-x+y-z-1) + \beta(3y-2z+3) = 0$$

Y como $P(1,-2,-1)$ está en dicho plano, pues es un punto de la recta $t$, satisface su ecuación:

$$\alpha(-1-2+1-1) + \beta(-6+2+3) = 0 \Rightarrow -3\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \beta = -3\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(-x+y-z-1) - 3\alpha(3y-2z+3) = 0 \Rightarrow \alpha(-x+y-z-1-9y+6z-9) = 0 \overset{1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \pi \equiv x+8y-5z+10 = 0$$

Sea $Q$ el punto de corte de las rectas $s$ y $t$.

Por ser $Q$ un punto de la recta $s$:

$$Q(3, 1+\lambda, -1-\lambda)$$

Y por estar $Q$ en el plano $\pi$, pues pertenece a la recta $t$, satisface su ecuación:[2]

$$3+8(1+\lambda)-5(-1-\lambda)+10 = 0 \Rightarrow 3+8+8\lambda+5+5\lambda+10 = 0 \Rightarrow 13\lambda = -26 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(3,-1,1) \Rightarrow [\overrightarrow{PQ}] = (2,1,2) \Rightarrow t \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2}$$

[1] Como $\alpha$ es distinto de 0, podemos dividir por $\alpha$. Si $\alpha$ fuese cero, $\beta$ también lo sería, lo que no puede ser.
[2] Para otras formas de resolver este problema ver el ejercicio B2 de junio de 2010.

**EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2019. PROBLEMA B3.**

Calcula el valor del parámetro $\alpha$ para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}\log(x^2+9) & x\le 1\\ \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\alpha\cdot(1-x)} & x>1\end{cases}$$ (2 puntos)

• La función $f$ es continua en $(-\infty,1)$:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\log(x^2+9)=\log(a^2+9)=f(a)\quad \forall a\in(-\infty,1)$$

• La función $f$ es continua en $(1,+\infty)$:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\alpha\cdot(1-x)}=\frac{\cos\frac{\pi a}{2}}{\alpha\cdot(1-a)}=f(a)\quad \forall a\in(1,+\infty)$$

• Para que la función $f$ sea continua en todo $\mathbb{R}$, debe ser continua también en $x=1$:

1º) Calculamos el valor de la función en el punto $x=1$:

$$f(1)=\log 10=1$$

2º) Calculamos los límites laterales de la función en el punto $x=1$:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\log(x^2+9)=\log 10=1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\alpha\cdot(1-x)}\overset{1}{=}\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{-\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}{-\alpha}=\frac{-\pi/2}{-\alpha}=\frac{\pi}{2\alpha}$$

3º) Los límites laterales deben coincidir con el valor de la función en $x=1$:

$$\frac{\pi}{2\alpha}=1\Rightarrow 2\alpha=\pi\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}$$

---

[1] Como sale la indeterminada $0/0$, aplicamos L'Hôpital.

**EXAMEN EXTRAORDINARIO DE 2019. PROBLEMA B4.**
Demuestra que la siguiente función tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1, 0)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso:

$$f(x) = \cos(\pi x) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2) \qquad \text{(3 puntos)}$$

1º) Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, vamos a calcular $f'$; aunque antes hallaremos el dominio de $f$:

• $Dom(f) = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $y = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$:

$$+ \quad 1 \quad - \quad 2 \quad +$$

• $Dom(f') = Dom(f)$:

$$f'(x) = -\pi \cdot \text{sen}(\pi x) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2) + \cos(\pi x) \cdot \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

2º) Como la función $f'$ satisface las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo cerrado $[-1, 0]$, existe $\alpha$ en el intervalo abierto $(-1, 0)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

En efecto:

1ª) La función $f'$ tiene signos distintos en los extremos del intervalo $[-1, 0]$:

$$f'(-1) = -\pi \cdot 0 \cdot \ln 6 + (-1) \cdot \frac{-5}{6} = \frac{5}{6} > 0$$

$$f'(0) = -\pi \cdot 0 \cdot \ln 2 + 1 \cdot \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} < 0$$

2ª) La función $f'$ es continua en el intervalo cerrado $[-1, 0]$:

$$\lim_{x \to a} f'(x) = \lim_{x \to a} \left[ -\pi \cdot \text{sen}(\pi x) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2) + \cos(\pi x) \cdot \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} \right] =$$

$$= -\pi \cdot \text{sen}(\pi a) \cdot \ln(a^2 - 3a + 2) + \cos(\pi a) \cdot \frac{2a - 3}{a^2 - 3a + 2} = f(a) \quad \forall a \in [-1, 0]$$

3º) Ahora bien, como $f$ es continua en $\alpha$ por ser derivable en dicho punto, y $f'$ es positiva a la izquierda y negativa a la derecha de $\alpha$, entonces, por el criterio de la variación del signo de la primera derivada, $f$ tiene en dicho punto un máximo relativo.[1]

[1] Puede que la gráfica de la función $f'$ corte al eje de abscisas en más de un punto en el intervalo abierto $(-1, 0)$, pero por lo menos hay uno en el que sucede lo que hemos dicho, que $f'$ es positiva a la izquierda y negativa a la derecha en las proximidades de ese punto. Es fácil verlo.