EXAMEN ORDINARIO DE 2019. PROBLEMA A1.
Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases}(a+2)x-y-az=-a\\(-a-2)x+2y+(a^2-a)z=3a-1\\(a+2)x-2y+(2-2a)z=-2a\end{cases}\qquad (3\text{ puntos})$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a+2&-1&-a&-a\\-a-2&2&a^2-a&3a-1\\a+2&-2&2-2a&-2a\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}a+2&-1&-a&-a\\0&1&a^2-2a&2a-1\\0&-1&2-a&-a\end{array}\right)\overset{2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}a+2&-1&-a&-a\\0&1&a^2-2a&2a-1\\0&0&a^2-3a+2&a-1\end{array}\right)\overset{3}{\to}\begin{cases}a+2=0\Rightarrow a=-2\\a^2-3a+2=0\Rightarrow a=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\a=1\end{cases}\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=-2$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&2&2\\0&1&8&-5\\0&0&12&-3\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&2&2\\0&0&10&-3\\0&0&12&-3\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&2&2\\0&0&10&-3\\0&0&120&-30\end{array}\right)\overset{6}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&2&2\\0&0&10&-3\\0&0&0&6\end{array}\right)$$

2º) Si $a=1$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&-1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\begin{cases}3x-y-z=-1\\y-z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-1-z-z=-1\\y=1+z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2z/3\\y=1+z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=(2/3)\alpha\\y=1+\alpha\\z=\alpha\end{cases}$$

3º) Si $a=2$, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&-1&-2&-2\\0&1&0&3\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases}(a+2)x-y-az=-a\\y+a(a-2)z=2a-1\\(a-1)(a-2)z=a-1\end{cases}\Rightarrow z=\frac{a-1}{(a-1)(a-2)}\Rightarrow\boxed{z=\frac{1}{a-2}}\Rightarrow y=2a-1-a(a-2)\frac{1}{a-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{y=a-1}\Rightarrow(a+2)x=-a+a-1+\frac{a}{a-2}=\frac{-a+2+a}{a-2}=\frac{2}{a-2}\Rightarrow\boxed{x=\frac{2}{a^2-4}}$$

---

1 $2^{\underline{a}}f+1^{\underline{a}}f;\,3^{\underline{a}}f-1^{\underline{a}}f$.
2 $3^{\underline{a}}f+2^{\underline{a}}f$.
3 Como no se puede dividir por 0, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).
4 $2^{\underline{a}}f+1^{\underline{a}}f$.
5 $3^{\underline{a}}f\cdot 10$.
6 $3^{\underline{a}}f-12\cdot 2^{\underline{a}}f$.

EXAMEN ORDINARIO DE 2019. PROBLEMA A2.

Dadas las siguientes rectas, calcula la ecuación de un plano π paralelo a la recta r y que diste de s 3 unidades:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$$

(2 puntos)

Un vector direccional de la recta r se obtiene multiplicando vectorialmente los vectores característicos de los planos que la definen, ya que se trata de dos vectores perpendiculares a r:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

El vector direccional de la recta s, el vector $\vec{v} = (1, 2, 2)$, también es paralelo al plano π, ya que la recta s dista 3 unidades de dicho plano, lo que significa que no lo corta, o sea, que es paralela a él.

Por tanto, un vector característico del plano π es:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 8\vec{k} = -4(2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k})$$

En consecuencia:

$$\pi \equiv 2x + y - 2z + D = 0$$

Ahora bien, como $P(-2, 1, 1)$ es un punto de la recta s:

$$d(s, \pi) = d(P, \pi) \Rightarrow 3 = \frac{|-4 + 1 - 2 + D|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \Rightarrow 9 = |D - 5| \Rightarrow D - 5 = \pm 9 \Rightarrow D = \pm 9 + 5 \Rightarrow \begin{cases} D = 14 \\ D = -4 \end{cases}$$

Existen, pues, dos soluciones:

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z + 14 = 0$$

$$\pi_2 \equiv 2x + y - 2z - 4 = 0$$

EXAMEN ORDINARIO DE 2019. PROBLEMA A3.

Calcula la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado:

$$f(x) = ln\ \sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{\text{sen}(2x)}} \qquad\qquad g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} \qquad\qquad \text{(2 puntos)}$$

1ª)

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{\text{sen}(2x)}} = \ln\left(\frac{1-\cos(2x)}{\text{sen}(2x)}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot \ln\frac{1-\cos(2x)}{\text{sen}(2x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1-\cos(2x)}{\text{sen}(2x)}\right)'}{\frac{1-\cos(2x)}{\text{sen}(2x)}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot\text{sen}(2x)\cdot\text{sen}(2x) - 2\cos(2x)\cdot[1-\cos(2x)]}{\text{sen}^2\,(2x)}\cdot\frac{\text{sen}(2x)}{1-\cos(2x)} =$$

$$= \frac{2\cdot[\text{sen}^2\,(2x) - \cos(2x) + \cos^2\,(2x)]}{2\cdot\text{sen}(2x)\cdot[1-\cos(2x)]} = \frac{1-\cos(2x)}{\text{sen}(2x)\cdot[1-\cos(2x)]} = \frac{1}{\text{sen}(2x)} = \text{cosec}(2x)$$

2ª)

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} = (x^{-1})^{-x} = x^x \overset{1}{\Rightarrow} \ln g(x) = x\cdot\ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = (1+\ln x)\cdot g(x) = (1+\ln x)\cdot x^x$$

---

[1] Aplicamos el método de derivación logarítmica.

EXAMEN ORDINARIO DE 2019. PROBLEMA A4.

Dada la función f, demuestra que existe $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = -1/4$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso:

$$f(x) = [x^2 + \log(x^2 - 2x + 7)]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}} \qquad \text{(3 puntos)}$$

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo cerrado $[-1, 3]$, existe α en el intervalo abierto $(-1, 3)$ tal que:

$$f'(\alpha) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{10^0 - 2^1}{4} = \frac{1 - 2}{4} = -\frac{1}{4}$$

En efecto:

1ª) La función f es continua en el intervalo cerrado $[-1, 3]$:

• Por el criterio de la derivada segunda, la parábola $y = x^2 - 2x + 7$ tiene un mínimo en $x = 1$ que vale $y = 6$:

$$y' = 2x - 2 = 2(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 6$$

$$y'' = 2 > 0$$

• $Dom(f) = \mathbb{R}$:

$$x^2 - 2x + 7 \geq 6 > 1 \Rightarrow \log(x^2 - 2x + 7) > 0 \Rightarrow x^2 + \log(x^2 - 2x + 7) > 0$$

• La función f es continua en su dominio:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [x^2 + \log(x^2 - 2x + 7)]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}} = [a^2 + \log(a^2 - 2a + 7)]^{\sqrt[3]{\frac{3-a}{4}}} = f(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

2ª) La función f es derivable en el intervalo abierto $(-1, 3)$:

• Si $g(x) = x^2 + \log(x^2 - 2x + 7) \Rightarrow \begin{cases} Dom(g) = \mathbb{R} \\ g'(x) = 2x + \frac{(2x-2)\cdot \log e}{x^2 - 2x + 7} \Rightarrow Dom(g') = \mathbb{R} \end{cases}$

• Si $h(x) = \left(\frac{3-x}{4}\right)^{1/3} \Rightarrow \begin{cases} Dom(h) = \mathbb{R} \\ h'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3-x}{4}\right)^{-2/3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{12} \cdot \left(\frac{4}{3-x}\right)^{2/3} \Rightarrow Dom(h') = \mathbb{R} - \{3\} \end{cases}$

• Como $g > 0$ y, por tanto, $Dom(\ln g) = \mathbb{R}$:

$$f = g^h = e^{h \cdot \ln g} \Rightarrow f' = e^{h \cdot \ln g} \cdot (h \cdot \ln g)' = f \cdot \left[h' \cdot \ln g + \frac{h \cdot g'}{g}\right] \Rightarrow Dom(f') = \mathbb{R} - \{3\}$$

EXAMEN ORDINARIO DE 2019. PROBLEMA B1.

Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A^{35} = A^{25}$ teniendo en cuenta que A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Como la inversa de A^n es A^{-n}:

$$X \cdot A^{35} = A^{25} \Rightarrow (X \cdot A^{35}) \cdot A^{-35} = A^{25} \cdot A^{-35} \Rightarrow X \cdot I = A^{-10} \Rightarrow X = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz A por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora las sucesivas potencias de la matriz A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A^{-3} = A \cdot A^{-1} = I$$

Por tanto:

$$X = A^{-10} = A^{-3 \cdot 3 - 1} = (A^{-3})^3 \cdot A^{-1} = I^3 \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

---

1 $2^{\underline{a}} f + 1^{\underline{a}} f$.

2 $1^{\underline{a}} f - 2^{\underline{a}} f$.

3 $1^{\underline{a}} f \cdot (-1);\ 2^{\underline{a}} f \cdot (-1)$.

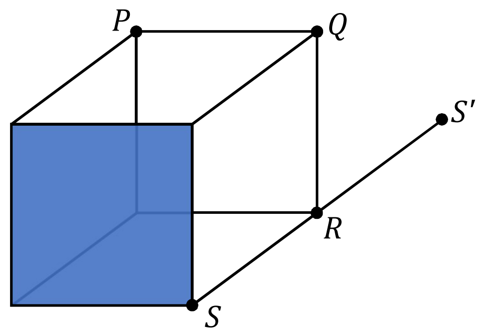
EXAMEN ORDINARIO DE 2019. PROBLEMA B2.
$P(1,-1,1)$, $Q(5,-3,5)$ y $R(7,-7,1)$ son tres vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo. (3 puntos)

Averiguamos primero la disposición de los puntos P, Q y R en la cara del cubo:

$$[\overrightarrow{QP}] = (-4,2,-4) \Rightarrow \left|[\overrightarrow{QP}]\right| = \sqrt{16+4+16} = 6$$

$$[\overrightarrow{QR}] = (2,-4,-4) \Rightarrow \left|[\overrightarrow{QR}]\right| = \sqrt{4+16+16} = 6$$

Por tanto, P y R son vértices opuestos:



Calculamos un vector perpendicular al plano PQR:

$$\vec{w} = [\overrightarrow{QP}] \wedge [\overrightarrow{QR}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = -24\vec{\imath} - 24\vec{\jmath} + 12\vec{k} = -12(2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k})$$

Calculamos el módulo de este vector:

$$|\vec{w}| = 12 \cdot \sqrt{4+4+1} = 12 \cdot 3 = 36$$

Por tanto:

$$[\overrightarrow{RS}] = \frac{1}{6} \cdot \vec{w} = -4\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

Si $S(x,y,z)$:

$$[\overrightarrow{RS}] = (-4,-4,2) \Rightarrow (x-7, y+7, z-1) = (-4,-4,2) \Rightarrow \begin{cases} x-7=-4 \\ y+7=-4 \\ z-1=2 \end{cases} \Rightarrow S(3,-11,3)$$

El centro del cubo es el punto medio del segmento PS:

$$M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1-11}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \rightarrow M(2,-6,2)$$

Es fácil ver que existen dos cubos que satisfacen las condiciones del problema. El otro es el simétrico respecto del plano PQR del que hemos dibujado. Para calcular su centro, obtenemos primero las coordenadas del punto S', el simétrico de S respecto de R: $S'(11,-3,-1)$. Pues bien, el centro del otro cubo es el punto medio del segmento PS': $M'(6,-2,0)$. También puede calcularse con la ecuación vectorial $[\overrightarrow{M'M}] = [\overrightarrow{RS}]$.

EXAMEN ORDINARIO DE 2019. PROBLEMA B3.
Dada la función f, demuestra que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso:

$$f(x) = \frac{\ln\left[x - 1 + \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]}{4x - x^2} \qquad \text{(2 puntos)}$$

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo cerrado $[1,3]$, existe α en el intervalo abierto $(1,3)$ tal que:

$$f(\alpha) = 0$$

En efecto:

1ª) La función f tiene signos distintos en los extremos del intervalo $[1,3]$:

$$f(1) = \frac{\ln\left[0 + \text{sen}^2 \frac{\pi}{4}\right]}{3} = \frac{\ln(1/2)}{3} = \frac{\ln 1 - \ln 2}{3} = \frac{-\ln 2}{3} < 0$$

$$f(3) = \frac{\ln\left[2 + \text{sen}^2 \frac{3\pi}{4}\right]}{3} = \frac{\ln\left[2 + \frac{1}{2}\right]}{3} = \frac{\ln(5/2)}{3} > 0$$

2ª) La función f es continua en el intervalo cerrado $[1,3]$:

- $[1,3] \subset Dom(f)$:

$$1 \le x \le 3 \Rightarrow \left.\begin{cases} 0 \le x - 1 \le 2 \\ \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi x}{4} \le \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le \text{sen} \frac{\pi x}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \text{sen}^2 \frac{\pi x}{4} \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad 0 < x - 1 + \text{sen}^2 \frac{\pi x}{4}$$

$$4x - x^2 = x(4 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

- $\forall a \in [1,3]$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{\ln\left[x - 1 + \text{sen}^2 \frac{\pi x}{4}\right]}{4x - x^2} = \frac{\ln\left[a - 1 + \text{sen}^2 \frac{\pi a}{4}\right]}{4a - a^2} = f(a)$$

EXAMEN ORDINARIO DE 2019. PROBLEMA B4.

Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones f y g y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas:

$$f(x) = 5 - x \qquad\qquad g(x) = \frac{2}{x-2}$$

(3 puntos)

1º) Hallamos primero los puntos de corte de ambas gráficas:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 5 - x = \frac{2}{x-2} \Rightarrow 5x - 10 - x^2 + 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 3 \end{cases}$$

2º) Averiguamos la posición relativa de ambas gráficas en el intervalo $(3, 4)$:

x	$f(x)$	$g(x)$
$7/2$	$3/2$	$4/3$

3º) Calculamos el área:

$$A = \int_3^4 [f(x) - g(x)]dx = \int_3^4 \left(5 - x - \frac{2}{x-2}\right)dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 2\ln|x-2|\right]_3^4 =$$

$$= (20 - 8 - 2\ln 2) - \left(15 - \frac{9}{2} - 2\ln 1\right) = 12 - \ln 4 - 15 + \frac{9}{2} = \frac{3}{2} - \ln 4$$