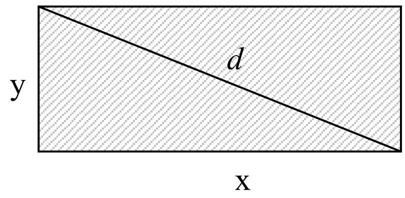
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1.- Entre todos los rectángulos de perímetro 12 cm. ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?.

Solución:



Perímetro: $2x+2y=12 \Rightarrow x+y=6 \Rightarrow y=6-x$ (condición que se ha de cumplir)

Función a minimizar: $x^2+y^2=d^2 \Rightarrow d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(6-x)^2}$

Es decir, $d(x)=\sqrt{2x^2-12x+36}$ que es la función a estudiar.

$$d'(x)=\frac{4x-12}{2\sqrt{2x^2-12x+36}}=\frac{2x-6}{\sqrt{2x^2-6x+18}}$$

Igualando $d'(x)$ a cero y resolviendo la ecuación resultante se obtiene $x = 3$

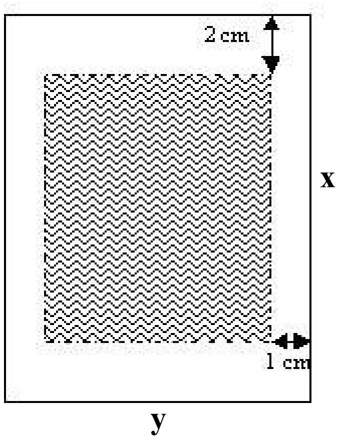
Segunda derivada: $$d''(x)=\frac{2\sqrt{2x^2-6x+18}-\dfrac{4x-6}{2\sqrt{2x^2-6x+18}}.(2x-6)}{2x^2-6x+18}$$

Valor de la segunda derivada para $x = 3$:

$$d''(3)=\frac{2\sqrt{2.3^2-18+18}-0}{2.3^2-18+18}=\frac{2\sqrt{2.3^2}}{2.3^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}>0$$ (mínimo, se trata de un cuadrado)

2.- Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm. cada uno, y los laterales 1 cm. Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

Solución:



Condición que se tiene que dar: 18 cm^2 de texto impreso, es decir, $(x-4)(y-2)=18$

$$y-2=\frac{18}{x-4} \Rightarrow \quad y=\frac{10+2x}{x-4}$$

Función a minimizar: Superficie = $x.y = x.\frac{10+2x}{x-4} = \frac{10x+2x^2}{x-4}$, es decir,

$S=\frac{10x+2x^2}{x-4}$. Derivando, $S'=\frac{2x^2-16x-40}{(x-4)^2}$. Si hacemos $S'=0$ entonces

$$2x^2-16x-40=0 \Rightarrow \quad x^2-8x-20=0 \Rightarrow \quad x=\frac{8\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{8\pm 12}{2}=\begin{cases}10\\ -2\end{cases}$$

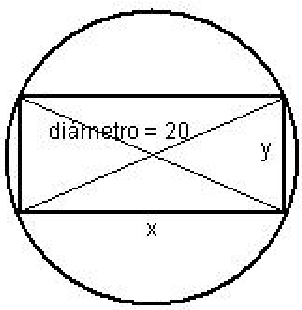
La solución negativa no tiene sentido.

$$S''=\frac{(4x-16)(x-4)^2-2(x-4)(2x^2-16x-40)}{(x-4)^4}; \quad S''(10)=\frac{24.36-0}{6^4}>0$$

Para x = 10, la 2ª derivada es positiva, luego es un mínimo.

3.- Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 10 cm. de radio.

Solución:



Condición que se tiene que dar: $x^2+y^2=400 \Rightarrow \quad y=\sqrt{400-x^2}$

Función a maximizar: Área = $x.y = x\sqrt{400-x^2}$; $A=x\sqrt{400-x^2}$

$$A' = 1.\sqrt{400-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{400-x^2}}.x = \sqrt{400-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{400-x^2}} = \frac{400-2x^2}{\sqrt{400-x^2}}$$

Si hacemos $A' = 0$, $400 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 200 \Rightarrow x = \pm 10\sqrt{2}$

Es claro que la solución es $x = 10\sqrt{2}$ ya que la negativa no tiene sentido.
Comprobaremos que es máximo calculando la segunda derivada:

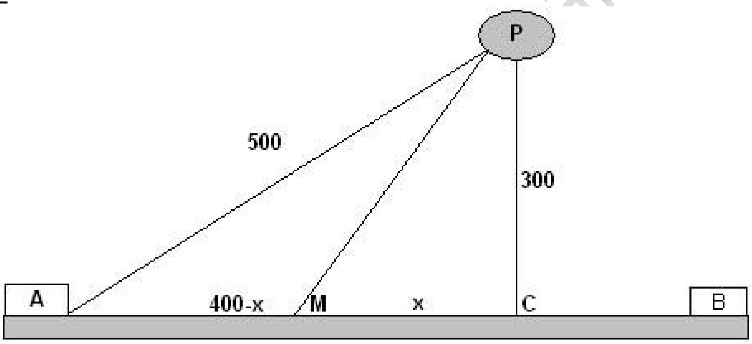
$$A'' = \frac{-4x\sqrt{400-x^2} - \dfrac{-2x}{2\sqrt{400-x^2}}(400-2x^2)}{400-x^2}$$

Para $x = 10\sqrt{2}$, $A''(10\sqrt{2}) = \dfrac{-4.10\sqrt{2}\sqrt{400-200} - 0}{200} = -\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{200}}{5} < 0$ (máximo)

Si $x = 10\sqrt{2},\ y = \sqrt{400-(10\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{2}$. Se trata de un cuadrado.

4.- En una carretera a través del desierto un automóvil debe ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 Km. De distancia de A. Puede aprovecha para ello una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 100 Km/h, mientras que por el desierto la velocidad es de 60 Km/h. Sabiendo que la distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 Km., determina la ruta que deberá usar para ir de A a P en el menor tiempo posible.

Solución:



La ruta a seguir es AMP.
Aplicando Pitágoras en el triángulo ACP se obtiene:

$$\overline{AC} = \sqrt{500^2 - 300^2} = 400$$

En el triángulo MCP se obtiene que $\overline{MP} = \sqrt{x^2 + 300^2}$

Y el tiempo que tarda el automóvil en recorrer la distancia AM + MP es:

$$t = \frac{4-x}{100} + \frac{\sqrt{x^2+300^2}}{60}.$$

Derivando, $t' = \dfrac{-1}{100} + \dfrac{1}{60}\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+300^2}} = \dfrac{-1}{100} + \dfrac{x}{60\sqrt{x^2+300^2}}$

Si hacemos $t' = 0$, $\dfrac{-1}{100} + \dfrac{x}{60\sqrt{x^2+300^2}} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{60\sqrt{x^2+300^2}} = \dfrac{1}{100}$

Es decir, $10x = 6\sqrt{x^2+300^2} \Rightarrow 100x^2 = 36x^2 + 36.300^2 \Rightarrow$

$64x^2 = 36.300^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{36.300^2}{64} \Rightarrow x = \pm 225$

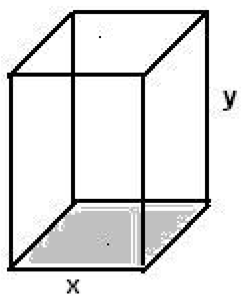
La solución negativa no tiene sentido. $AM = 400 - 225 = 175$
El automóvil deja la carretera a 175 Km. de la ciudad A.
Podemos comprobar que es mínimo hallando la segunda derivada:

$$t'' = \frac{1.60\sqrt{x^2+300^2} - 60.\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+300^2}}}{60^2(x^2+300^2)} = \frac{\dfrac{60(x^2+300^2)-60x}{\sqrt{x^2+300^2}}}{60^2(x^2+300^2)} \Rightarrow$$

$t'' = \dfrac{60(x^2+300^2)-60x}{60^2(x^2+300^2)\sqrt{x^2+300^2}}$. Para x = 225, $t''(225) > 0$ (mínimo)

5.- Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4.000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?

Solución:



La función que tenemos que minimizar es el área del depósito: $A = x^2 + 4xy$

Con la condición de que el volumen $V = x^2 y$ sea de 4000 litros.

$x^2 y = 4000 \Rightarrow y = \dfrac{4000}{x^2}$, por tanto, $A = x^2 + 4x.\dfrac{4000}{x^2}$

$A = x^2 + \dfrac{16000}{x}$ (función a minimizar)

$A = x^2 + 1600x^{-1}$; $A' = 2x - 1.16000x^{-2} = 2x - \dfrac{16000}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 16000}{x^2}$

Si hacemos $A' = 0$, $2x^3 - 16000 = 0 \Rightarrow x^3 = 8000 \Rightarrow x = 20$

Segundo derivada: $A'' = \dfrac{6x^2.x^2 - 2x(2x^3 - 16000)}{x^4} = \dfrac{2x^3 + 32000}{x^3}$

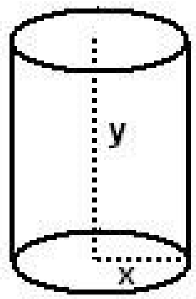
Para *x = 20*, $A''(20) = \dfrac{2.20^3 + 32000}{20^3} > 0 \Rightarrow$ para *x = 20* la superficie es mínima.

Si *x = 20*, $y = \dfrac{4000}{20^2} = 10$

luego la caja debe tener *20 dm*. de lado y *10 dm*. de altura.

6.- Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto de área total 150 cm^2 y volumen máximo. Determina su generatriz y su radio.

Solución:
El área total de un cilindro es:
Área = $2\pi \times radio \times generatriz$ + *el área de las dos bases* $(\pi \times radio^2 + \pi \times radio^2)$



es decir, $A = 2\pi.x.y + 2\pi.x^2 = 150$ (Condición que se tiene que cumplir)

Y de aquí, $\pi.x.y + \pi.x^2 = 75 \Rightarrow y = \dfrac{75 - \pi x^2}{\pi x}$

El volumen del cilindro es igual al área de la base por la altura, por tanto,

$V = \pi x^2 y = \pi x^2 \dfrac{75 - \pi x^2}{\pi x} = 75x - \pi.x^3$ (función a maximizar)

Derivando, $V' = 75 - 3\pi.x^2$

Si hacemos $V' = 0$, $75 - 3\pi.x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{75}{3\pi} = \dfrac{25}{\pi} \Rightarrow x = \pm\dfrac{5}{\sqrt{\pi}}$

Segunda derivada: $V'' = -6\pi.x$

$$V''\left(\frac{5}{\sqrt{\pi}}\right) = -6\pi.\frac{5}{\sqrt{\pi}} = \frac{-30\pi.\sqrt{\pi}}{\pi} = -30\sqrt{\pi} < 0$$

Para $x = \dfrac{5}{\sqrt{\pi}}$ el volumen es máximo.

$$y = \frac{75 - \pi\dfrac{25}{\pi}}{\pi.\dfrac{5}{\sqrt{\pi}}} = \frac{50}{\dfrac{5\pi}{\sqrt{\pi}}} = \frac{50\sqrt{\pi}}{5\pi} = \frac{10\sqrt{\pi}}{\pi}$$