

REGLA DE L'HÔPITAL

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a, b]$, derivables en (a, b) y tales que sus derivadas no se anulan simultáneamente en ningún punto del intervalo (a, b) .

Sea $x_0 \in (a, b)$.

Si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y existe el $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe el $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y son iguales.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Este resultado se aplica directamente a los casos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

. Indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$.

- Calcula los siguientes límites:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ (aplicando L'Hôpital) } = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 7x^2 + 12x} = \frac{0}{0} \text{ (aplicando L'Hôpital) } = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 5}{3x^2 - 14x + 12} = \frac{3}{4}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} \text{ (aplicando L'Hôpital) } = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x - \sin x} = \frac{0}{0} \text{ (aplicando reiteradamente la Regla de L'Hôpital) }$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12}{\cos x} = \frac{12}{1} = 12$$

L'Hôpital

L'Hôpital

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^x}{\sin 4x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x \cdot \ln 4 - 2^x \cdot \ln 2}{4 \cdot \cos 4x} = \frac{\ln 4 - \ln 2}{4} = \frac{\ln \frac{4}{2}}{4} = \frac{\ln 2}{4}$$

L'Hôpital

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{2x} = \frac{e}{2}$$

L'Hôpital

. Indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

- Calcula los siguientes límites:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 2} = \frac{\infty}{\infty} \quad (\text{aplicamos L'Hôpital}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad (\text{aplicamos L'Hôpital}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{e^{2x} \cdot 2} = \frac{\infty}{\infty} \quad (\text{aplicamos nuevamente L'Hôpital})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^{2x} \cdot 2 \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cotg x} = \frac{\infty}{\infty} \quad (\text{aplicamos L'Hôpital}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-x} = \frac{0}{0} \quad (\text{aplicamos nuevamente L'Hôpital})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{-1} = 0$$

. Indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0 \cdot \infty \quad \text{ó} \quad \infty \cdot 0$$

Se transforma en uno del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ mediante el cambio:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \right] = \frac{0}{0} \quad \text{ó} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{y se aplica la Regla de L'Hôpital.}$$

- Calcula los siguientes límites:

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\left(x - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \tg x \right] = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)}{\frac{1}{\tg x}} \right] = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)}{\frac{\cos x}{\sin x}} \right] = \frac{0}{0} \quad (\text{L'Hôpital}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{-\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{-(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Material elaborado para el trabajo en clase