1.- Cierto estudiante obtuvo, en un control que constaba de 3 preguntas, una calificación de 8 puntos. En la segunda pregunta sacó dos puntos más que en la primera y un punto menos que en la tercera.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para determinar la puntuación obtenida en cada una de las preguntas.

b) Resolver el sistema.

Solución:

Apartado a:

Si llamamos x, y, z, a la puntuación obtenida en cada pregunta, respectivamente, tendremos:

$$\begin{cases} x+y+z=8 \\ y=x+2 \\ y=z-1 \end{cases} \quad \text{, ordenamos:} \quad \begin{cases} x+y+z=8 \\ -x+y=2 \\ y-z=-1 \end{cases}$$

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow r(M) = r(M_a) = 3 \rightarrow \text{S.C.D.}$$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer; para ello calculamos los valores de:

$$|M_x| = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \ ; \quad |M_y| = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -9 \ ; \quad |M_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -12$$

$$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{-3}{-3} = 1 \ ; \quad y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{-9}{-3} = 3 \ ; \quad z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{-12}{-3} = 4$$

Luego, habrá obtenido 1 punto en la primera pregunta, 3 en la segunda y 4 en la tercera.

2.- Un ama de casa adquirió en el mercado ciertas cantidades de patatas, manzanas y naranjas a un precio de 100, 120 y 150 ptas/kg., respectivamente. El importe total de la compra fueron 1.160 ptas. El peso total de la misma, 9 kg. Además, compró 1 kg. más de naranjas que de manzanas.

a) Plantear un sistema para determinar la cantidad comprada de cada producto.

b) Resolver el problema.

Solución:

Apartado a:

Si llamamos x, y, z, al número de kg. comprados de patatas, manzanas y naranjas, respectivamente, tendremos:

$$\begin{cases} 100x+120y+150z=1160 \\ x+y+z=9 \\ y+1=z \end{cases} \quad \text{simplificamos:} \quad \begin{cases} 10x+12y+15z=116 \\ x+y+z=9 \\ y-z=-1 \end{cases}$$

Apartado b)

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 15 & 116 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $|M| = \begin{vmatrix} 10 & 12 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow r(M) = r(M_a) = 3 \rightarrow$ S.C.D.

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer; para ello calculamos los valores de:

$$|M_x| = \begin{vmatrix} 116 & 12 & 15 \\ 9 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 14 \ ; \quad |M_y| = \begin{vmatrix} 10 & 116 & 15 \\ 1 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \ ; \quad |M_z| = \begin{vmatrix} 10 & 12 & 116 \\ 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 28$$

$$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{14}{7} = 2 \ ; \quad y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{21}{7} = 3 \ ; \quad z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{28}{7} = 4$$

Por tanto, habrá comprado 2 kg. de patatas, 3 kg. de manzanas y 4 kg. de naranjas.

3.- El precio de entrada a cierta exposición es de 200 ptas. para los niños, 500 para los adultos y 250 para los jubilados. En una jornada concreta, la exposición fue visitada por 200 personas en total, igualando el número de visitantes adultos al de niños y jubilados juntos. La recaudación de dicho día ascendió a 73.500 ptas.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos niños, adultos y jubilados visitaron la exposición ese día.

b) Resolver el problema.

Solución:

Apartado a:

Si llamamos x, y, z, al número de niños, adultos y jubilados, respectivamente, que visitaron ese día la exposición, tendremos:

$$\begin{cases} x+y+z=200 \\ y=x+z \\ 200x+500y+250z=73500 \end{cases} \quad \text{simplificamos:} \quad \begin{cases} x+y+z=200 \\ x-y+z=0 \\ 20x+50y+25z=7350 \end{cases}$$

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 20 & 50 & 25 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 20 & 50 & 25 & 7350 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 20 & 50 & 25 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \rightarrow r(M) = r(M_a) = 3 \rightarrow \text{S.C.D.}$$

Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer; para ello calculamos los valores de:

$$|M_x| = \begin{vmatrix} 200 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 7350 & 50 & 25 \end{vmatrix} = -300 \; ; \quad |M_y| = \begin{vmatrix} 1 & 200 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 20 & 7350 & 25 \end{vmatrix} = -1000 \; ; \quad |M_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 200 \\ 1 & -1 & 0 \\ 20 & 50 & 7350 \end{vmatrix} = -700$$

$$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{-300}{-10} = 30 \; ; \quad y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{-1000}{-10} = 100 \; ; \quad z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{-700}{-10} = 70$$

Luego, a la exposición, habrán acudido 30 niños, 100 adultos y 70 jubilados.

4.- Un agente inmobiliario puede realizar 3 tipos de operaciones: venta de un piso nuevo, venta de un piso usado y alquiler. Por la venta de cada piso nuevo recibe una prima de 120.000 ptas. Si la operación es la venta de un piso usado recibe 60.000 ptas. Se desconoce la prima cuando la operación es un alquiler.

Este mes el número total de operaciones fue 5. La prima total por venta de pisos fue superior en 200.000 ptas. a la obtenida por alquileres, y la prima total por venta de pisos nuevos fue el triple que por alquileres.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (sin resolverlo) para obtener el número de operaciones de cada tipo realizadas (en función de la prima de alquiler de valor desconocido).

b) Indica una prima a la que es imposible que se hayan podido pagar los alquileres.

c) Indica tres primas a las que es posible que se hayan podido pagar los alquileres.

d) Si la prima de alquileres fue de 20.000 ptas. ¿cuántas operaciones de cada tipo se realizaron?

Solución:

Apartado a:

Llamamos x, y, z, al número operaciones de cada tipo que ha realizado y m a la prima desconocida (en miles de pesetas):

x = nº ventas de pisos nuevos

y = nº ventas de pisos usados

z = nº alquileres

Con lo que tendremos:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ 120x+60y=mz+200 \\ 120x=3mz \end{cases} \text{, ordenamos: } \begin{cases} x+y+z=5 \\ 120x+60y-mz=200 \\ 120x-3mz=0 \end{cases}$$

Apartado b:

Para estudiar la compatibilidad del sistema, escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada con los términos independientes M_a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 60 & -m \\ 120 & 0 & -3m \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 120 & 60 & -m & 200 \\ 120 & 0 & -3m & 0 \end{pmatrix}$$

Analizamos los valores críticos haciendo |M| = 0

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 60 & -m \\ 120 & 0 & -3m \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; 60m - 7200 = 0 \;\rightarrow\; m = 120$$

• Si m ≠ 120

$|M| \neq 0 \rightarrow r(M) = r(M_a) = 3 \rightarrow$ S.C.D. (solución única).

• Si m = 120

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 60 & -120 \\ 120 & 0 & -360 \end{pmatrix} \qquad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 120 & 60 & -120 & 200 \\ 120 & 0 & -360 & 0 \end{pmatrix}$$

$|M| = 0 \rightarrow r(M) = 2$, puesto que es posible encontrar en la matriz M un menor complementario de orden 2 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 120 & 60 \end{vmatrix}$

$r(M_a) = 3$, puesto que es posible encontrar en la matriz M_a un menor complementario de orden 3 y distinto de cero; por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 120 & 60 & 200 \\ 120 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Como $r(M) \neq r(M_a) \rightarrow$ S.I. (No solución).

Por esta razón, resultaría imposible que las primas por alquileres fueran 120.000 ptas.

Apartado c:

Resolvemos el sistema en función de m:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 60 & -m \\ 120 & 0 & -3m \end{vmatrix} = 60m - 7200$$

$$|M_x| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 200 & 60 & -m \\ 0 & 0 & -3m \end{vmatrix} = -300m \;\rightarrow\; x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{-300m}{60m - 7200}$$

$$|M_y| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 120 & 200 & -m \\ 120 & 0 & -3m \end{vmatrix} = 600m - 24000 \;\rightarrow\; y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{600m - 24000}{60m - 7200}$$

$$|M_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 120 & 60 & 200 \\ 120 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12000 \;\rightarrow\; z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{-12000}{60m - 7200}$$

Apartado d:

Si la prima de alquileres hubiera sido de 20.000 ptas, tendríamos: m = 20

$$x = \frac{|M_x|}{|M|} = \frac{-300m}{60m - 7200} = 1 \ ; \quad y = \frac{|M_y|}{|M|} = \frac{600m - 24000}{60m - 7200} = 2 \ ; \quad z = \frac{|M_z|}{|M|} = \frac{-12000}{60m - 7200} = 2$$

Con lo que habría vendido 1 piso nuevo, 2 pisos usados y realizado 2 alquileres.

5.- En una farmacia se comercializan 3 tipos de champú de cierta marca: normal, con vitaminas y anticaspa. Se sabe que el precio al que se vende el normal es de 2 euros y el de vitaminas es de 3 euros. Se desconoce el precio al que se vende el anticaspa. Por otro lado, el dinero total obtenido por las ventas de los 3 tipos de champú el mes pasado fue de 112 euros y el dinero obtenido en ventas con el champú normal fue 56 euros inferior al dinero total obtenido en ventas con el resto. Además, el dinero total obtenido en ventas con el champú de vitaminas y el anticaspa fue el mismo que el que hubiera obtenido vendiendo 28 unidades del anticaspa y ninguna de los demás.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función del precio desconocido del champú anticaspa, que puedes llamar por ejemplo m) donde las incógnitas (x, y, z) sean las unidades vendidas el mes pasado de cada tipo de champú.

b) ¿Qué puedes concluir sobre el precio del champú anticaspa a partir de un estudio de la compatibilidad del sistema?

c) Si se sabe que el número de unidades vendidas del anticaspa fue 20, utiliza el resultado del apartado (b) para calcular las unidades vendidas de los otros 2.

Solución:

Apartado a:

Llamamos x, y, z, al número de unidades de cada tipo que ha vendido y m al precio desconocido del champú anticaspa

x = nº unidades champú normal

y = nº unidades champú con vitaminas

z = nº unidades champú anticaspa

Con lo que tendremos:

$$\begin{cases} 2x + 3y + mz = 112 \\ 2x + 56 = 3y + mz \\ 3y + mz = 28m \end{cases} \quad \text{, ordenamos:} \quad \begin{cases} 2x + 3y + mz = 112 \\ 2x - 3y - mz = -56 \\ 3y + mz = 28m \end{cases}$$

Apartado b:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & m \\ 2 & -3 & -m \\ 0 & 3 & m \end{pmatrix} \quad ; \quad M_a = \begin{pmatrix} 2 & 3 & m & 112 \\ 2 & -3 & -m & -56 \\ 0 & 3 & m & 28m \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & m \\ 2 & -3 & -m \\ 0 & 3 & m \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \text{r (M) = 2, pues } \exists \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 112 \\ 2 & -3 & -56 \\ 0 & 3 & 28m \end{vmatrix} = -336m + 1008 = 0 \rightarrow \{m = 3\}$$

• Si m = 3:

r(M) = r(M_a) = 2 < nº incógnitas → S.C.I. (Infinitas soluciones)

• Si m ≠ 3:

r(M) = 2 ≠ r(M_a) = 3 → S.I. (no hay solución)

Apartado c:

Como que m = 3 y sabemos que z = 20, el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} 2x+3y+mz=112 \\ 2x-3y-mz=-56 \\ 3y+mz=28m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+3y+3z=112 \\ 2x-3y-3z=-56 \\ 3y+3z=84 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+3y+60=112 \\ 2x-3y-60=-56 \\ 3y+60=84 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+3y=52 \\ 2x-3y=4 \\ 3y=24 \end{cases} \rightarrow \{x = 14,\ y = 8\}$$