DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR

Las funciones polinómicas son las más sencillas; para calcular su valor sólo necesitamos emplear las operaciones básicas. Muchas veces en Física General aparecen funciones que dificultan la obtención de resultados cuando se aplica el razonamiento matemático. Una herramienta que, en muchas ocasiones, resuelve el problema es la fórmula de Taylor. Efectivamente, el desarrollo en serie de Taylor permite aproximar una función, derivable $n+1$ veces, a un polinomio de grado n.

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo que contiene al punto a, derivable $n+1$ veces, la fórmula de Taylor establece que,

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(c)(x-a)^{n+1}$$

donde la expresión $$R(c)=\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(c)(x-a)^{n+1}$$

recibe el nombre de resto y tiene la particularidad de que la derivada que aparece en él debe calcularse en un punto c convenientemente elegido, desconocido, pero interior al intervalo de extremos a y x. La aproximación de la fórmula de Taylor puede ser muy precisa, aun sin utilizar el término del resto, si $f^{(n+1}$ varía poco entre a y x.

En particular, si $a=0$ resulta la fórmula de Mac-Laurin,

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(a)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(c)x^{n+1}$$

A modo de ejemplo, apliquemos la fórmula de Mac-Laurin para obtener una aproximación a la función e^x,

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$$

Para $x=1$ y $n=4$ tenemos,

$$e^1=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=2{,}708\widehat{3}$$

teniendo en cuenta que $e^1=e=2{,}71828\ldots$, el error cometido en la aproximación es,

$$Er=\frac{e-2{,}708\widehat{3}}{e}\times 100=0{,}366\%\ \text{ de error}$$