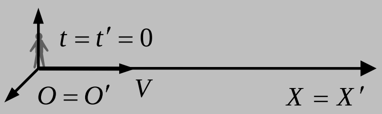
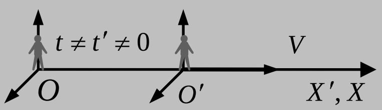
ARTÍCULO 2º: CONTRACCIÓN DE LA LONGITUD Y DILATACIÓN DEL TIEMPO

1. Introducción

En este artículo trataremos tres consecuencias de la teoría de la Relatividad Restringida que, aunque son bien conocidas, no dejan de ser espectaculares y “contrarias” a nuestro sentido común. Se trata de la contracción de la longitud, la dilación del tiempo y la simultaneidad.

Cuando un objeto se mueve respecto a un sistema de referencia inercial, parece sufrir una contracción de la longitud del mismo en la dirección del movimiento. Igualmente, un reloj en movimiento respecto a un observador inercial aparenta avanzar más lentamente que otro idéntico que está en reposo respecto al mismo observador.

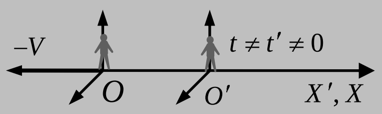




Sea un observador inercial O' que se mueve respecto a otro O con velocidad constante V en la dirección del eje OX común a sus respectivos sistemas de coordenadas, como se ve en las figuras. Si ambos observadores *se encuentran en sus respectivos orígenes de coordenadas* y *ajustan sus relojes de forma que* $t_0 = t_0' = 0$ *cuando las posiciones de* O y O' *coinciden*, las ecuaciones de la transformación de Lorentz[1] tienen la forma,

$$\boxed{x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}} \qquad (2.1)$$

Evidentemente t y t' representan los instantes que marcan los relojes, idénticos, de los observadores O y O' cuando O' está a una distancia Vt de O. Ahora bien, al ser $t_0 = t_0' = 0$ cuando $O = O'$, t y t' representan también los intervalos de tiempo transcurridos (en los respectivos sistemas) desde que O y O' coinciden hasta que la distancia que los separa es Vt.



Puesto que no existen sistemas inerciales privilegiados, el observador O' tiene el mismo derecho a utilizar la transformación de Lorentz que O. Ahora bien, de acuerdo con O', el sistema O se mueve con una velocidad $-V$ a lo largo del eje OX, como ilustra la figura; así que las ecuaciones de la transformación de Lorentz (2.1), desde el sistema de referencia O', se tienen que escribir como,

---

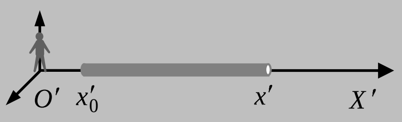
[1] La transformación de Lorentz la puedes encontrar deducida en el punto 3.4 del artículo 1 (Transformaciones de Galileo y Lorentz) de este blog. Es el conjunto de ecuaciones 1.20.

$$\boxed{x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}} \quad (2.2)$$

El conjunto de ecuaciones (2.2) reciben el nombre de ***transformación inversa de Lorentz***.

En los puntos 2, 3 y 4 se utilizarán las transformaciones de Lorentz directa e inversa para llegar a las ecuaciones que demuestran con toda generalidad la contracción de longitudes, la dilatación del tiempo y la falta de sincronización de relojes en distintos sistemas de referencia.
En el punto 5, a partir de ejemplos concretos, veremos que las ecuaciones obtenidas en los apartados anteriores son una consecuencia de la constancia de la velocidad de la luz. Comprobaremos la veracidad de dichas ecuaciones a partir del hecho de la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia. Aunque de este modo no se demuestran las ecuaciones (sólo se comprueban), la línea de razonamiento seguida puede ser suficiente en muchos casos. Aquellos lectores que no necesiten más, pueden saltarse los puntos 2, 3 y 4, en los que sí se demuestran las ecuaciones.

2. Contracción de la longitud

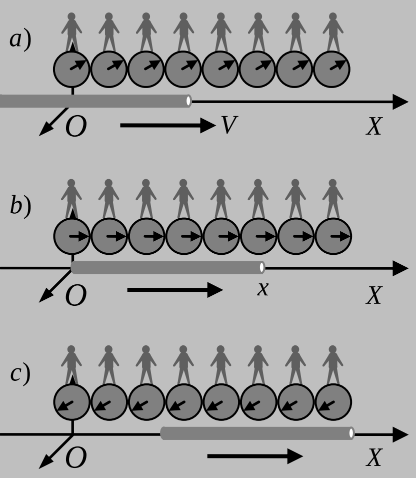


En primer lugar conviene aclarar el concepto de longitud. La figura muestra una varilla colocada en *reposo* a lo largo del eje $O'X'$ de un sistema de referencia inercial. Su longitud, L_0, se define como la distancia entre sus extremos; por lo tanto, puesto que el extremo izquierdo está en el punto x'_0 y el derecho en el x', queda claro que,

$$L_0 = x' - x'_0 \quad (2.3)$$

Notemos que, al estar la varilla en reposo, *las coordenadas de posición de sus extremos son independientes del tiempo*.

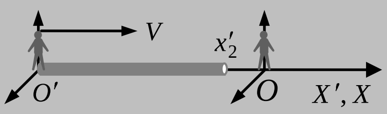
La longitud de un objeto en un sistema de referencia inercial en el que está en reposo, L_0, recibe el nombre de longitud propia.



La longitud de la varilla en un sistema de referencia O respecto al cual se mueve con velocidad V a lo largo del eje OX se determina de la misma forma que en O'; es decir, hallando la diferencia entre las posiciones de sus extremos. Sin embargo ahora la varilla está en movimiento, por lo que, para que la medida sea correcta, es absolutamente necesario que determinemos las posiciones de sus extremos *exactamente en el mismo instante t*.
Una forma simple (aunque no práctica) de llevarlo a cabo es colocar en reposo a lo largo del eje OX un conjunto de relojes idénticos y perfectamente sincronizados (al estar en reposo, todos ellos miden el mismo instante); las figuras muestran la posición de la varilla (que se mueve con velocidad V) y la lectura de los relojes en distintos instantes. El observador situado más a la izquierda anota el instante que marca su reloj cuando su posición coincide con la del *extremo izquierdo* de la varilla; mientras que el resto de los observadores anotan el instante en el que pasa por su posición el *extremo derecho* de la misma. En la figura b) se ve que *en el mismo instante*, t, en el que el *extremo izquierdo* de la varilla está en el origen O ($x_0 = 0$), el *extremo derecho* pasa por el punto x. Así pues, cuando los observadores realicen su

puesta en común, estarán de acuerdo en que las posiciones del extremo de la varilla *en el mismo instante* son $x_0 = 0$ y x. Por lo tanto, la longitud de la varilla, L, medida desde O es,

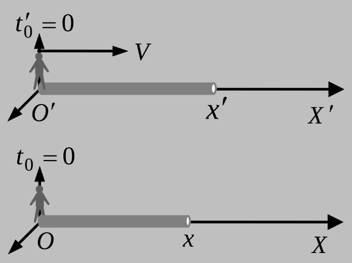
$$L = x(t) - x_0(t) = x(t) \quad (2.4)$$



Coloquemos la varilla en reposo en el sistema O', orientada a lo largo del eje $O'X'$, de modo que su extremo izquierdo coincida con el origen ($x'_0 = 0$); y consideremos un sistema de referencia O, con la misma orientación que el anterior, de modo que O' se mueve respecto a él con velocidad V a lo largo del eje OX común a ambos, como se ve en la figura.

Por simplicidad supondremos que cuando O y O' coinciden, los relojes colocados en ambos sistemas marcan el instante cero; matemáticamente,

$$para\ O \equiv O' \Rightarrow \quad x_0 = x'_0 = 0 \ \text{ y } \ t_0 = t'_0 = 0$$



La figura, en la que se han dibujado los ejes separados para mayor claridad, muestra la situación cuando O y O' coinciden. De acuerdo con la ecuación (2.2), la longitud de la varilla en el sistema O', en el que está en reposo, es

$$L_0 = x' - x'_0 = x' \quad \text{pues } \ x'_0 = 0$$

que es la *longitud propia* de la varilla. Mientras que la longitud que mide el observador O, al determinar la posición de los dos extremos en el *mismo instante* t_0, es,

$$L = x - x_0 = x \quad \text{pues } \ x_0 = 0$$

Si el observador O quiere obtener la posición del extremo derecho de la varilla que mide O' en el instante t_0, tiene que utilizar la primera de las ecuaciones de la transformación de Lorentz (2.1); esto es,

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (2.5)$$

donde V es la velocidad que lleva O' con respecto a O, c la velocidad de la luz y $t = t_0 = 0$ el instante que marca el reloj situado en O cuando *simultáneamente* se mide la posición de los extremos de la varilla x y $x_0 = 0$ en el sistema de referencia O; entonces tenemos,

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Puesto $L_0 = x'$ y $L = x$, encontramos que,

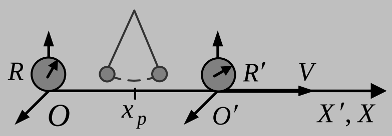
$$\boxed{L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}} \quad (2.6)$$

Como $\sqrt{1 - V^2/c^2} < 1 \Rightarrow L_0 > L$; es decir,

La longitud de un cuerpo parece más corta cuando se encuentra en movimiento relativo respecto al observador que cuando está en reposo; esto es, se cumple que $L_{mov} < L_0$, siendo L_0 la longitud del cuerpo en reposo (longitud propia).

Notemos que la contracción expresada por (2.6) se refiere únicamente al valor *medido* de la longitud del objeto en movimiento y es una consecuencia de la invariancia de la velocidad de la luz. La velocidad que aparece en la fórmula es la que lleva el objeto respecto al observador; por lo tanto, la contracción de la longitud es diferente para observadores en movimiento relativo entre sí.

3. Dilatación del tiempo



Consideremos de nuevo dos sistemas de referencia inerciales O y O' con la misma orientación de ejes, de modo que O' se mueve con velocidad V respecto a O a lo largo del eje OX común a ambos. Coloquemos un péndulo en *reposo* en el punto x_p del *sistema* O, como se ve en la figura. Los relojes R y R', en reposo en O y en O', respectivamente, y que se ajustaron de modo que $t = t' = 0$ cuando O y O coincidían, miden (cada uno en su sistema) el intervalo de tiempo que le lleva al péndulo realizar una oscilación completa. El reloj R indica el instante t_1 cuando el péndulo comienza a oscilar y señala t_2 cuando completa una oscilación; así que, de acuerdo con la cuarta ecuación de la transformación de Lorentz (2.1), tenemos que,

$$t'_1 = \frac{t_1 - Vx_p/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \quad \text{y} \quad t'_2 = \frac{t_2 - Vx_p/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

donde t'_1 y t'_2 representan, respectivamente, los instantes que señala el reloj R' (en *reposo* en O') al comienzo y al final de la oscilación del péndulo. El intervalo de tiempo que le lleva al péndulo realizar la oscilación completa es $\Delta t = t_2 - t_1$ cuando se mide desde R y $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ al hacerlo desde R'. Por lo tanto, al combinar las ecuaciones, obtenemos,

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - Vx_p/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - \frac{t_1 - Vx_p/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \quad (2.7)$$

ya que los términos en x_p se cancelan porque el péndulo *se encuentra en reposo en ese punto* en el sistema O.

El intervalo de tiempo entre dos ***sucesos***[2] *medido por un reloj que está en reposo respecto al lugar en el que ocurren los sucesos se conoce como* ***intervalo de tiempo propio*** *y se representa con la letra griega* τ.

Como el reloj R se encuentra en reposo respecto al péndulo, es el que mide el intervalo de tiempo propio; así que la ecuación (2.7) queda como,

$$\boxed{\Delta t' = \frac{\tau}{\sqrt{1-V^2/c^2}}} \quad (2.8)$$

y puesto que $\sqrt{1-V^2/c^2} < 1$ se cumple que $\Delta t' > \tau$; es decir,

El intervalo de tiempo medido en el sistema O', *que está en movimiento respecto al lugar en el que ocurre el suceso, es siempre más* ***largo*** *que el intervalo de tiempo propio, que es el que se mide desde el sistema en reposo* O. *Efecto que se denomina* ***dilatación del tiempo***[3].

No es éste un concepto que se asuma fácilmente porque va en contra de nuestro sentido común. Sin embargo, se ha comprobado experimentalmente

---

[2] Un *suceso* ***espacio temporal*** o simplemente ***suceso*** es algo que ocurre en un instante específico de tiempo y en un lugar específico del espacio.

[3] En nuestro contexto la palabra *dilatar* significa alargar un intervalo de tiempo.

que esto es así.

Es importante darse cuenta de que el observador *O´* ve que el intervalo de tiempo medido por *O* es τ. Sin embargo, como el que mide él mismo en *O´* es $\Delta t' > \tau$, concluye que el reloj *R* mide un intervalo de tiempo *menor* para el mismo suceso; es decir, *dirá que R atrasa*.

El ejemplo mostrado a continuación prueba la validez de la ecuación (2.8).

Ejemplo: Tiempo de vida media de los mesones π+

Se sabe que esta partícula se desintegra en un mesón μ+ y un neutrino. El mesón π+ en el sistema en el que está en reposo tiene una vida media antes de desintegrarse de alrededor de $2{,}5\cdot10^{-8}$ *s* (este es el tiempo de vida media propio de la partícula, τ). Si se produce un haz de mesones π+ con una velocidad $v = 0{,}9c$; ¿cuál es el tiempo de vida media de haz cuando se observa desde el sistema de referencia del laboratorio?

El tiempo de vida media esperado del mesón π+ se obtiene aplicando la ecuación (2.7),

$$\Delta t' = \frac{\tau}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{2{,}5\cdot10^{-8}}{\sqrt{1-(0{,}9c)^2/c^2}} = \frac{2{,}5\cdot10^{-8}}{\sqrt{1-0{,}9^2}} = 5{,}7\cdot10^{-8}\,s$$

Si realmente la vida media de los mesones π+ en el sistema del laboratorio es de $5{,}7\cdot10^{-8}$ *s*, la distancia media que deberían recorrer antes de desintegrarse sería,

$$d' = V\Delta t' = 0{,}9c\times5{,}7\cdot10^{-8} = 15{,}4\,m$$

en lugar de

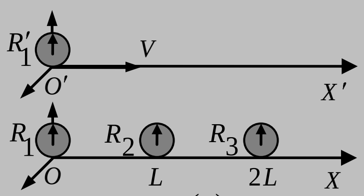
$$d = V\tau = 0{,}9c\times2{,}5\cdot10^{-8} = 6{,}75\,m$$

que es la distancia que recorrerían si su vida media fuera de $2{,}5\cdot10^{-8}$ *s*.

Los experimentos realizados corroboran que la distancia recorrida por los mesones π+, medida en el sistema del laboratorio, es de 15,4 m; lo que prueba que la dilatación del tiempo es real y también la validez de la Relatividad Restringida.

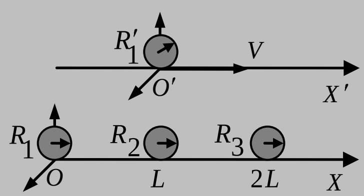
4. Relatividad del tiempo y simultaneidad

Para poder analizar los sucesos desde la perspectiva de observadores en sistemas de referencia que se mueven a distintas velocidades, necesitamos una relación más, la que se refiere a lo que marcan relojes ubicados en distintos puntos del espacio.



(*a*)

Sean los sistemas de referencia inerciales *O* y *O′* del punto anterior. Los relojes R_1, R_2 y R_3 (todos sincronizados) están en reposo en el sistema *O*, separados a intervalos iguales *L* a lo largo del eje *OX* y el reloj R'_1 está en reposo en el sistema *O′*, que se mueve con velocidad *V* respecto a *O* a lo largo del eje *X* común a ambos. Supongamos que en el instante $t'_0 = t_0 = 0$ las posiciones de *O* y *O′* coinciden, como se ilustra en la figura (a).



(*b*)

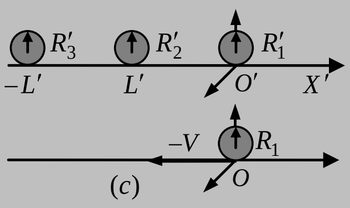
Como se ve en la figura (b), en el instante t_L, *medido por los relojes ubicados en el sistema O*, las posiciones de los relojes R'_1 y R_2 coinciden. El observador *O* utiliza la transformación de Lorentz (2.1) para determinar el instante t'_L que marca el reloj R'_1. Puesto que $x = L = Vt_L$, tenemos que,

$$t'_L = \frac{t_L - Vx/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{t_L - V\left(Vt_L\right)/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{t_L - t_L V^2/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{t_L\left(1-V^2/c^2\right)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

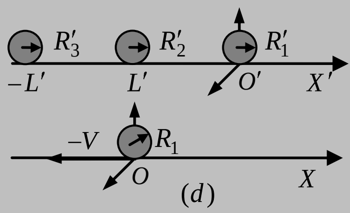
que podemos escribir también así,

$$t'_L = \frac{t_L\left(1-V^2/c^2\right)}{\left(1-V^2/c^2\right)^{1/2}} = t_L\left(1-V^2/c^2\right)^{1/2} = t_L\sqrt{1-V^2/c^2} \quad (2.9)$$

Como $\sqrt{1-V^2/c^2} < 1 \Rightarrow t'_L < t_L$; es decir, *de acuerdo con el observador O, el reloj móvil R'_1 atrasa*.



Hemos visto la indicación de los relojes desde el sistema O; veamos qué ocurre si analizamos la marcha de los mismos desde el sistema O'. Ahora los relojes R'_1, R'_2 y R'_3 (todos sincronizados) están en reposo en el sistema O', separados a intervalos iguales L' a lo largo del eje OX', y el reloj R_1 está en reposo en el sistema O. Como en el caso anterior, supongamos que en el instante $t'_0 = t_0 = 0$ las posiciones de O y O' coinciden, como se ilustra en la figura (c).



Como se ve en la figura (d), en el instante t'_L, *medido por los relojes ubicados en el sistema O'*, las posiciones de los relojes R_1 y R'_2 coinciden. El observador O' utiliza la transformación *inversa* de Lorentz (2.2) para averiguar la lectura t_L del reloj R_1. Ya que $x' = -L' = -Vt'_L$, obtenemos que,

$$t_L = \frac{t'_L + Vx'/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{t'_L + V(-Vt'_L)/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{t'_L - t'_L V^2/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{t'_L(1-V^2/c^2)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

que podemos expresar también como,

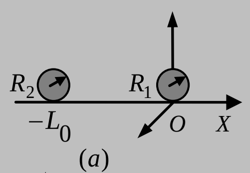
$$t_L = \frac{t'_L(1-V^2/c^2)}{(1-V^2/c^2)^{1/2}} = t'_L(1-V^2/c^2)^{1/2} = t'_L\sqrt{1-V^2/c^2} \quad (2.10)$$

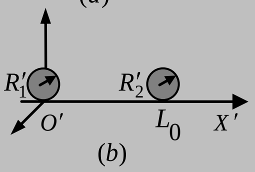
Como $\sqrt{1-V^2/c^2} < 1 \Rightarrow t_L < t'_L$; es decir, *de acuerdo con el observador O', el reloj móvil R_1 atrasa*.

Como acabamos de comprobar, el efecto de la dilatación del tiempo es completamente simétrico; es decir,

Si un reloj R en reposo en un sistema O es observado por O´, que se mueve con velocidad constante respecto a O, concluye que el reloj R avanza más lentamente (o sea, que atrasa). Cada observador cree que los relojes que se mueven respecto a él avanzan más lentamente que los que se encuentran en reposo en su propio marco de referencia. La dilatación del tiempo suele resumirse en la siguiente frase: "Los relojes en movimiento atrasan".

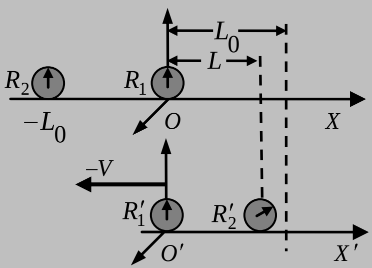
Hay que tener muchísima precaución con la interpretación del párrafo anterior. Lo que significa es que un reloj que se mueve con relación a un sistema de referencia que contiene un conjunto de relojes, en reposo y sincronizados, atrasa respecto al tiempo medido por los relojes en reposo. Es decir, podemos afirmar que "los relojes en movimiento atrasan" sólo en el sentido de comparar a un reloj en movimiento con un conjunto de relojes estacionarios y sincronizados.





Una consecuencia de la dilatación del tiempo es el de la sincronización de relojes. En efecto, *un conjunto de relojes sincronizados en un sistema inercial en el que están en reposo dejan de estarlo cuando se observan desde otro sistema de referencia que se mueve respecto al primero*.

La figuras (a) y (b) muestran dos relojes sincronizados y separados una distancia L_0, medida en sus respectivos sistemas de referencia O y O'. Lo que queremos saber es si los relojes ubicados en O' siguen sincronizados para el observador O cuando el sistema O' se mueve respecto a O con una velocidad $-V$ a lo largo del eje X común a ambos. Supongamos que en el instante $t'_0 = t_0 = 0$ (es decir, que tanto para O como O' los relojes R_1 y R'_1 marcan



(c)

cero) las posiciones de O y O' coinciden; la figura (c) muestra esta situación *vista por el observador O*.

Para saber la lectura del reloj R'_2, el observador O aplica la transformación de Lorentz (2.1),

$$t' = \frac{t - (-V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

pero $t = 0$, ya que en el sistema O todos los relojes están sincronizados y su lectura cuando O y O' coinciden es cero. Por otro lado, x representa la posición de R'_2 en el sistema O, que no es L_0 porque la distancia entre R'_1 y R'_2 está contraída (debido al movimiento de O' respecto a O). En la figura (c) se ve que $x = L$; por lo tanto, la ecuación anterior se transforma en,

$$t' = \frac{(V/c^2)L}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Aplicando la ecuación (2.6), que expresa la longitud propia en función de la longitud contraída, tenemos que,

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \;\Rightarrow\; L = L_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

que al sustituir en la ecuación anterior, da,

$$t' = \frac{(V/c^2)L}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{(V/c^2)L_0\sqrt{1 - V^2/c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad\Rightarrow\quad t' = \frac{VL_0}{c^2}$$

Puesto que el reloj R'_1, en el mismo instante, señala $t'_0 = 0$, R'_2 está adelantado en la cantidad,

$$\boxed{\Delta t = t' - t'_0 = \frac{VL_0}{c^2}} \quad (2.11)$$

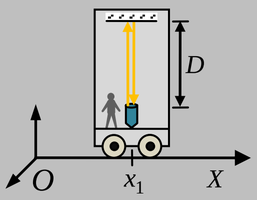
Si dos relojes se han sincronizado en su sistema en reposo, en un sistema en el que se mueven con velocidad V paralela a la línea que los une, el reloj trasero va adelantado en un tiempo VL_0/c^2 respecto al reloj que va por delante, siendo L_0 la distancia propia entre los relojes.

5. Más sobre la contracción de la longitud, la dilatación del tiempo y la simultaneidad

Como ya hemos dicho en la introducción, se puede llegar a las ecuaciones (2.6), (2.8), (2.10) y (2.11) proponiendo situaciones convenientes y partiendo exclusivamente de que la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia. Tiene que quedar claro que de este modo no se demuestran las ecuaciones, tan solo se comprueba que se cumplen en los ejemplo propuestos.

Los lectores que hayan estudiado los apartados 2, 3 y 4 y comprendan el significado de las ecuaciones deducidas pueden omitir esta sección, aunque su lectura puede ayudar a entender mejor el alcance de la transformación de Lorentz. El apartado está especialmente dirigido a aquellos lectores cuyo interés fundamental es entender que la causa de la contracción de la longitud, la dilatación del tiempo y la falta de simultaneidad es sólo una consecuencia de la constancia de la velocidad de la luz. Sin embargo, el concepto de simultaneidad queda más claro cuando se obtiene directamente de la transformación de Lorentz.

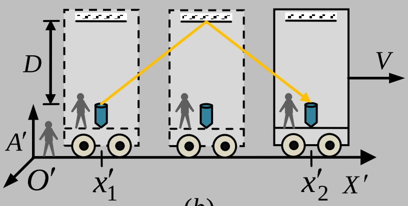
5.1. Dilatación del tiempo y contracción de la longitud



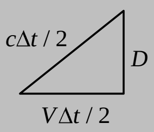
(*a*)

Consideremos un observador en el interior de un carrito en reposo en el punto x_1 de un sistema de referencia O, como ilustra la figura a). Dispone de un dispositivo que emite y detecta flashes luminosos y de un espejo situado en la vertical del dispositivo a una distancia D del mismo.

El observador emite un flash luminoso hacia el espejo y el detector registra el intervalo de tiempo Δt que le lleva a la luz regresar al punto de partida. Puesto que la luz se mueve con velocidad c, este tiempo es $\Delta t = 2D/c$.



(*b*)



(*c*)

Consideremos ahora estos dos mismos sucesos, el destello de luz de ida y el de vuelta, en un sistema de referencia O', en el que *el observador O* y el espejo se están moviendo a lo largo del eje OX' con velocidad V, como se indica en la figura b). Para un observador en reposo en O' los sucesos ocurren en dos lugares diferentes x'_1 y x'_2 en el sistema O' ya que, entre el destello de ida y vuelta, el observador O se ha desplazado una distancia horizontal $x'_2 - x'_1 = V\Delta t'$, donde $\Delta t'$ es el intervalo de tiempo que transcurre entre los sucesos medido en O'. En las figuras se aprecia que el camino recorrido por la luz es mayor en el sistema O' que en O; por lo tanto, puesto que la velocidad de la luz, c, es la misma en todos los sistemas de referencia, deberá emplear más tiempo en O' para alcanzar el espejo y volver. El intervalo de tiempo medido en O', $\Delta t'$, es mayor que el medido en O, Δt. Podemos calcular la relación entre ambos intervalos de tiempo con la ayuda de las figuras b) y c).

En efecto, la distancia que recorre la luz en el sistema O' desde que se emite el flash hasta que llega al espejo es $c\Delta t'/2$ y la distancia que recorre el carrito en ese mismo tiempo es $V\Delta t'/2$, como se refleja en la figura c). Puesto que la distancia entre el espejo y dispositivo emisor del flash es D, tenemos, al aplicar el teorema de Pitágoras, que,

$$(c\Delta t' / 2)^2 = D^2 + (V\Delta t' / 2)^2 \Rightarrow \Delta t' = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$

que sacando c^2 fuera de la raíz, podemos expresar como,

$$\Delta t' = \frac{2D}{c\sqrt{1 - V^2 / c^2}} = \frac{2D}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$$

pero en el sistema O tenemos que,

$$\Delta t = 2D / c \;\Rightarrow\; 2D = \Delta t\, c$$

por lo que, combinando las dos ecuaciones, llegamos a,

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} \quad (2.12)$$

y haciendo $\tau = \Delta t$, la expresión queda como,

$$\boxed{\Delta t' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}} \quad (2.8)$$

que es la ecuación obtenida en el punto 3. Como

$$\sqrt{1-v^2/c^2} < 1 \Rightarrow \tau < \Delta t'$$

los observadores situados en O' dirán que el reloj que tiene el observador en el sistema O atrasa ya que señala un intervalo de tiempo, τ, más corto entre sucesos. Puesto que el reloj de O se mueve respecto a O', así que,

Los relojes en movimiento relativo respecto a un sistema de referencia atrasan respecto a los ubicados en este sistema de referencia.

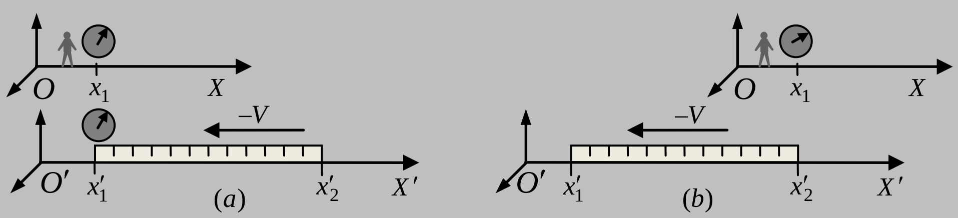
El intervalo de tiempo Δt medido en el sistema O, que es el más corto posible, se representa siempre con la letra griega τ y, como ya se ha visto en el punto 3, recibe el nombre de *intervalo de tiempo propio*.

Notemos que, puesto que los sucesos en el sistema O' ocurren en distintos lugares, se necesitan dos relojes *sincronizados* ubicados en los puntos x'_1 y x'_2 para medir el intervalo de tiempo $\Delta t'$; sin embargo, el intervalo τ lo puede medir el observador O con *un único reloj en reposo* en el punto x_1.

El intervalo de tiempo que se mide en cualquier sistema de referencia en el que los sucesos tienen lugar en distintos lugares es siempre mayor que el tiempo propio, que es el que puede medirse con un único reloj en reposo en el sistema de referencia. Este fenómeno, como ya sabemos, se conoce como dilatación del tiempo.

La dilatación del tiempo está estrechamente relacionada con el fenómeno de *la contracción de la longitud*. Como ya hemos visto en el punto 3, la longitud de un objeto medida en un sistema de referencia en el que se encuentra en reposo se llama *longitud propia*.

Consideremos un observador en reposo en el punto x_1 en un sistema de referencia O que dispone de un reloj, como se ve en la figura a) superior. Coloquemos en reposo y el eje OX' de un sistema de referencia O', que se mueve respecto a O con velocidad $-V$ a lo largo del eje OX común un segundo observador y una regla cuyos extremos están en los puntos x'_1 y x'_2, como muestra la figura a) inferior. Supongamos que ambos observadores ajustan sus relojes de modo que $t_1 = t_1'$ cuando las posiciones x_1 y x'_1 coinciden (ver figura a).



El observador O determina la longitud de la regla, L, midiendo el intervalo de tiempo, $\Delta t = t_2 - t_1$, que lleva al punto x'_2 (extremo derecho de la regla) coincidir con la posición x_1 y multiplicándolo por V que es la velocidad de O' (donde la regla está en reposo) respecto a O; esto es,

$$L = |-V|\Delta t = V\Delta t \Rightarrow \Delta t = L/V$$

Notemos que Δt ha sido medido por un *único reloj en reposo* ubicado en el punto x_1; por lo tanto, se trata del tiempo propio, $\Delta t = \tau$, así que queda,

$$\tau = L/V \quad (2.13)$$

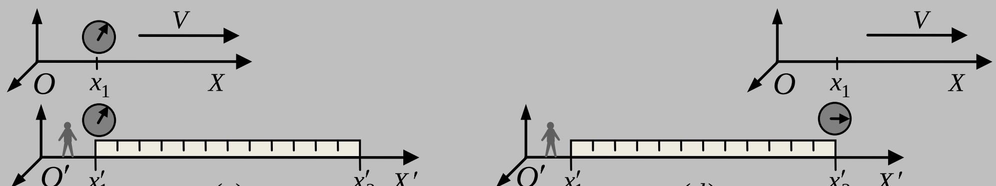
La longitud de la regla que mide el observador O' es la longitud propia, L_0, porque se encuentra en reposo en este sistema de referencia. Se puede hallar simplemente leyendo la indicación de su extremo derecho o encontrando la diferencia entre sus posiciones extremas, o sea,

$$L_0 = x'_2 - x'_1$$

Ahora bien, como se ve en las figuras c) y d), para el observador O' es el sistema O el que se mueve hacia la derecha con velocidad V. Desde el punto de vista de O', el intervalo de tiempo, $\Delta t'$, que le lleva al punto x'_2 coincidir con la posición x_1 a la velocidad V; es decir, el tiempo que pasa desde que el punto $x_1 = x'_1$ coincide con la posición de x'_2 (ver figuras) es,

$$V = (x'_2 - x'_1) / \Delta t' = L_0 / \Delta t' \Rightarrow \Delta t' = L_0 / V \quad (2.14)$$

donde $\Delta t'$ es el intervalo de tiempo medido desde O', que es distinto del tiempo propio porque se ha medido con dos relojes ubicados en lugares diferentes x'_1 y x'_2.



(c) (d)

Los intervalos de tiempo $\Delta t = \tau$ y $\Delta t'$ miden el mismo suceso, sólo que desde sistemas de referencia diferentes. La relación entre ellos viene expresada por la ecuación (2.12); así que tenemos,

$$\Delta t' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Por lo que, al combinar la ecuación con (2.13) y (2.14), llegamos a,

$$\frac{L_0}{V} = \frac{L/V}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \Rightarrow \boxed{L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-V^2/c^2}}} \quad (2.6)$$

que es la ecuación obtenida en el punto 2. Puesto que,

$$\sqrt{1-v^2/c^2} < 1 \Rightarrow L < L_0$$

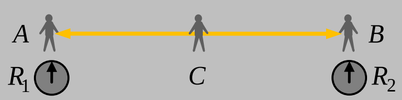
La longitud de un objeto parece más corta cuando se mide en un sistema de referencia respecto al que el objeto se mueve. La longitud en el sistema de referencia en el que el objeto está en reposo, longitud propia, es siempre más larga.

5.2. Sincronización de relojes y simultaneidad

Antes de ocuparnos de esta cuestión es conveniente aclarar el importante concepto de la *coincidencia espacio-temporal*. Llamamos ***coincidencia espacio-temporal*** *a cualquier conjunto de sucesos que ocurren en el mismo instante y en el mismo lugar del espacio de un sistema de referencia*. *Una coincidencia espacio-temporal en un sistema de referencia particular también lo es en cualquier otro sistema de referencia*. Esto significa que si varios sucesos tienen lugar en el instante t_0 en el punto del espacio (x, y, z) de un sistema de referencia O, los observadores de cualquier otro sistema de referencia O' están de acuerdo en que el reloj de O marca el instante t_0 cuando los sucesos ocurren y que lo hacen en el punto del espacio (x, y, z).

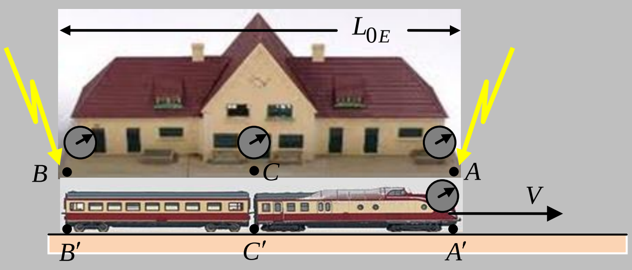
Podemos entender que esto es así considerando dos automóviles A y B pasando por el mismo cruce, de modo uno de ellos tiene un reloj. Los sucesos son: (1) el automóvil A pasa por el cruce, (2) el automóvil B pasa por el cruce y (3) el reloj marca un instante t_0. Supongamos que estos sucesos ocurren simultáneamente en el sistema O; es decir, los coches pasan por el cruce en el mismo instante t_0 y, por lo tanto, chocan. Supongamos también que los parachoques de ambos se abollan y que el reloj, a consecuencia del impacto, se estropea quedando fijo el instante t_0 en la esfera del mismo.
Si estos sucesos ocurren *simultáneamente* en el sistema O, deben también hacerlo *simultáneamente* en cualquier otro sistema de referencia; o quedan abollados los parachoques o no. Es decir, si los automóviles chocan, es indiscutible que se encontraban en el cruce al mismo tiempo y que el reloj marca el instante t_0 (pues el impacto inutiliza el reloj y deja grabado el instante en el que ocurre). Las evidencias que dejan los sucesos (abolladura de parachoques y lectura del reloj en t_0) indican que los observadores de cualquier sistema de referencia deben estar de acuerdo con este hecho.

La dilatación del tiempo y la contracción de la longitud parecen conceptos contradictorios. Si cada sistema de referencia puede considerarse en reposo respecto a otro móvil, los relojes en el "otro" sistema deberían moverse más lentamente. ¿Cómo puede habar coherencia si cada observador ve que los relojes de los otros atrasan? La respuesta a este rompecabezas radica en el *sincronismo* de los relojes y en el concepto de *simultaneidad*.
Notemos que el observador A' de la sección 5.1 necesita dos relojes para medir el intervalo de tiempo que le lleva al flash de luz alcanzar el espejo y regresar al punto de partida. La razón es que los sucesos ocurren en dos lugares *diferentes*, por lo que es necesario un reloj para medir el instante de emisión del flash y otro *diferente* para medir el instante de regreso; el intervalo transcurrido entre los dos sucesos se halla por resta. Este procedimiento exige que *los dos relojes estén sincronizados*.

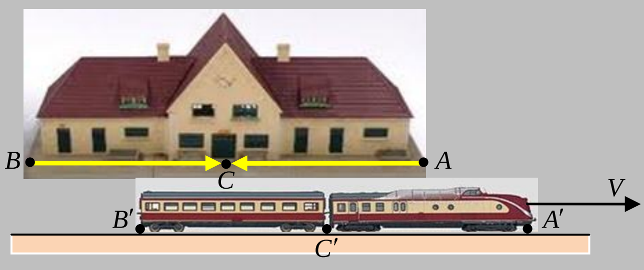


Veamos el problema del sincronismo. Un método conveniente para sincronizar dos relojes R_A y R_B separados en el espacio y en reposo relativo es colocar sendos observadores A y B junto a los relojes y a un tercer observador C en el punto medio entre ambos y en reposo respecto a ellos, como ilustra la figura. Éste envía una señal luminosa en el mismo instante a los observadores A y B, de modo que éstos sincronizan sus relojes en un instante preestablecido al recibir la señal. Puesto que C está a mitad de camino entre A y B, la luz llega al mismo tiempo a los dos relojes.
Examinemos ahora la cuestión de la simultaneidad. Supongamos que A y B se ponen de acuerdo para enviar un flash de luz a C en el *mismo instante* (después de haber sincronizado sus relojes); C verá los flashes de luz en el mismo momento y, puesto que está equidistante de A y B, concluirá que los flashes de luz son simultáneos. Otros observadores ubicados en el mismo sistema de referencia verán la luz de A o B primero, dependiendo de su posición, pero después de corregir el tiempo que la luz emplea en llegar hasta ellos, también concluirán que los flashes son simultáneos.
Veamos que los *sucesos simultáneos en un sistema de referencia O no lo son en otro sistema O' que se mueve con velocidad uniforme respecto al pri-*

mero. Sea un tren, en reposo en el sistema O', que se mueve con velocidad V respecto a una estación, en reposo en el sistema O. Consideremos tres observadores A, B y C colocados respectivamente en los extremos de la estación y en su punto medio; y otros tres A', B' y C' ubicados respectivamente en la parte delantera, trasera y mitad del tren, como se ve en las figuras a) y b). Los observadores de la estación y del tren disponen de relojes perfectamente sincronizados en sus respectivos sistemas de referencia.



a)



b)

Supongamos, como ilustra la figura a), que en el instante t_0, *medido en el sistema de la estación, los observadores* A, B y C constatan que sus posiciones coinciden, respectivamente, con las de los observadores A', B' y C', fijos en el sistema del tren (esto implica que, para los observadores de la estación, las longitudes de la estación y del tren son iguales). Admitamos también que en el instante t_0 los relojes de los observadores A y A' indican el mismo instante ($t_0 = t'_0$). Puesto que los relojes de la estación están sincronizados, la hora que ven los observadores A, B y C en sus relojes es la misma, t_0.
Imaginemos que los observadores A y B (fijos en la estación) notan que en el instante t_0 caen dos rayos en las partes delantera y trasera del tren y de la estación, y que los rayos dejan marcas de quemaduras en ambos (ver figura a). El observador C concluye que los rayos son simultáneos en el sistema de la estación porque ve los relámpagos de ambos en el mismo momento.

> Notemos que los sucesos (1) caída del rayo en la posición de A y (2) el reloj de A marca t_0 son una coincidencia espacio temporal. Asimismo los sucesos (3) caída del rayo en la posición de B y (4) el reloj de B marca t_0 es otra coincidencia espacio-temporal. Por lo tanto, los sucesos (1) y (2) son también simultáneos en el sistema del tren; y lo mismo ocurre los sucesos (3) y (4). Sin embargo, en el sistema del tren los sucesos (1) y (2) no tienen por qué ocurrir en el mismo instante que los sucesos (3) y (4); esto es así porque ocurren en distintos lugares (en la parte delantera y trasera del tren respectivamente.

De acuerdo con *los observadores de la estación*, los rayos *no pueden ser simultáneos en el sistema del tren*; en efecto, como se ve en la figura b), cuando el rayo de luz procedente de la parte delantera del tren llega al punto $C´$, este se ha movido hacia él, de modo que el destello que viene de la parte trasera todavía no le alcanza.
Sea L_{0E} la distancia entre las marcas que los rayos han dejado en el sistema de la estación, que es también su longitud propia y que, de acuerdo con la figura a), coincide con la longitud del tren, L'_T, medida en el sistema de la estación; es decir, $L_{0E} = L'_T$. Esta distancia es menor que la longitud propia

del tren, L'_{0T}, porque ésta está contraída en el sistema de la estación, respecto al que se mueve con velocidad V. De acuerdo con la ecuación (2.6), tenemos que,

$$L'_{0T} = \frac{L'_T}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{L_{0E}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Veamos ahora la situación desde el punto de vista del tren, respecto al que la estación se mueve con velocidad $-V$. La figura c) muestra lo que ven los observadores A', B' y C', fijos en el tren, en el instante $t_0 = t'_0$. Notemos que tiene que ser así porque:

- En ese instante las posiciones de los observadores A y A' tienen que coincidir (las marcas de las quemaduras que deja el rayo en el tren y en la estación en las posiciones de A y A' así lo prueban).
- La caída del rayo en A y que su reloj marque t_0 son también sucesos simultáneos en el sistema del tren.
- La longitud de la estación es menor que la del tren ya que está contraída.

De acuerdo con la ecuación (2.6), la longitud de la estación, L_E, observada desde el tren es,

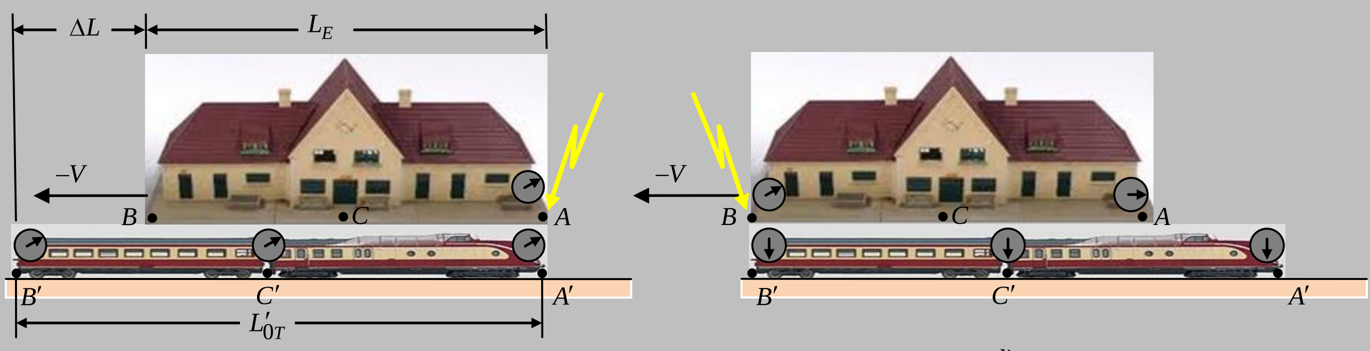
$$L_{0E} = \frac{L_E}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \Rightarrow L_E = L_{0E}\sqrt{1-V^2/c^2}$$

De la figura a) se desprende que,

$$\Delta L = L'_{0T} - L_E = \frac{L_{0E}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - L_{0E}\sqrt{1-V^2/c^2} = L_{0E}\left(\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} - \sqrt{1-V^2/c^2}\right)$$

de donde deducimos que,

$$\Delta L = \frac{L_{0E}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left[1-\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\right] = \frac{L_{0E}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{V^2}{c^2} \quad (2.16)$$



c)   d)

Como se ve en las figuras, el intervalo de tiempo que pasa en el sistema del tren desde que los observadores A y A' coinciden (instante $t_0 = t'_0$) hasta que lo hacen los observadores B y B' (instante t') es el mismo que el que emplea el andén, a la velocidad $-V$, en recorrer la distancia ΔL; así pues,

$$\Delta L = |-V|(t' - t'_0) = V\Delta t' \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta L}{V}$$

por lo tanto, insertando el resultado de (2.16) en esta ecuación,

$$\Delta t' = t' - t'_0 = \frac{\Delta L}{V} = \frac{1}{V}\frac{L_{0E}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{V^2}{c^2} = \frac{L_{0E}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{V}{c^2} \quad (2.18)$$

que expresa el intervalo de tiempo que transcurre en *el sistema del tren* desde que A y A' coinciden hasta que lo hacen B y B', como se aprecia en las figuras c) y d). Ahora bien, cuando cae el rayo en la parte trasera del tren se cumple (en el sistema del tren) que:

- Las posiciones de los observadores B y B' tienen que coincidir necesariamente (las marcas de las quemaduras que deja el rayo en el tren y en la estación en las posiciones de B y B' así lo prueban).
- El observador B' del tren está de acuerdo en que el rayo cayó en B (y, por tanto, en B') cuando el reloj del observador B de la estación marca el instante t_0. Esto es así porque la caída del rayo en B y que su reloj marque t_0 son también sucesos simultáneos en el sistema del tren,

Tanto en el sistema del tren como en el de la estación el rayo de la parte delantera del tren cae cuando A y A' coinciden y el de la parte trasera lo hace cuando coinciden B y B'; puesto que en el sistema del tren las posiciones A, A' y B, B' *no coinciden en el mismo instante, los rayos no pueden ser simultáneos para los observadores del tren. Cae primero el rayo de la parte delantera* (cuando A y A' coinciden) *y después el de la trasera* (cuando B y B' coinciden).

Durante el intervalo de tiempo $\Delta t'$ que transcurre desde que A y A' coinciden hasta que lo hacen B y B', de acuerdo con *los observadores del tren*, los relojes en *el sistema de la estación* marcan un intervalo de tiempo menor, debido a la dilatación del tiempo. Efectivamente, desde el sistema del tren, los relojes de la estación son móviles, por lo que atrasan (es decir, miden un intervalo de tiempo menor) respecto de los ubicados en el tren. Por lo tanto, tenemos al aplicar la ecuación (2.12) que,

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \;\Rightarrow\; \Delta t = \Delta t'\sqrt{1-V^2/c^2}$$

Combinando la esta ecuación con la (2.18) obtenemos que,

$$\Delta t = \Delta t'\sqrt{1-V^2/c^2} = \frac{L_{0E}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{V}{c^2}\sqrt{1-V^2/c^2}$$

y, como las raíces se cancelan, queda que,

$$\Delta t = L_{0E}V/c^2 \quad (2.19)$$

que expresa el intervalo de tiempo que transcurre, de acuerdo con *los observadores del tren*, en el reloj A de la estación desde que A y A' coinciden hasta que lo hacen B y B'. Los observadores A' y B' del tren pueden leer las lecturas de los relojes A y B de la estación cuando sus respectivas posiciones coinciden (ver figuras a y b) y ambos anotan el instante t_0 (que es cuando cayeron *simultáneamente* los dos rayos en el sistema de la estación). En el sistema del tren, el rayo que cae en la parte delantera del mismo lo hace en el instante $t'_0 = t_0$; sin embargo, el rayo que cae en la parte trasera lo hace más tarde. Puesto que, de acuerdo con *los observadores del tren*, transcurre un intervalo de tiempo $L_{0E}V/c^2$ en *el sistema de la estación* entre la caída de los dos rayos, la única posibilidad de que los relojes A y B de la estación señalen el mismo instante para la caída de los dos rayos es que *no estén sincronizados en el sistema de referencia del tren*; el situado en la posición A (reloj "perseguidor") tiene que adelantar al A en la cantidad $L_{0E}V/c^2$.

EJEMPLO: Los astronautas de una nave espacial pasan por delante de una estación interplanetaria a una velocidad v = 0,6c. En ese instante, cuando su reloj marca el instante t_0, llaman al centro de control de la estación para comunicar que van a dormir una siesta de una hora y que volverán a llamar después. ¿Cuánto dura esa siesta para los observadores de la estación?

Planteamiento del problema: El reloj *S* de la nave marca el instante t_0 cuando los astronautas inician la siesta (los sucesos (1) inicio de la siesta y (2) el reloj marca t_0, son una coincidencia espacio-temporal). Al finalizar la siesta el mismo reloj indica t_0+1 (los sucesos (3) final de la siesta y (4) el reloj marca t_0+1, son otra coincidencia espacio-temporal).
Los observadores de la nave están de acuerdo en que la siesta ha durado una hora ya que el reloj *S* está en reposo en la nave y, por lo tanto, no atrasa. Puesto que en el sistema de referencia de la nave los sucesos (inicio y final de la siesta) ocurren en el mismo lugar, el intervalo de tiempo entre los sucesos es también su intervalo de tiempo propio.
Los observadores de la estación están de acuerdo en que el reloj *S* de la nave marca t_0 al inicio de la siesta y t_0+1 al final de la misma; esto es así porque se trata de coincidencias espacio-temporales. Sin embargo, no están de acuerdo en que la siesta ha durado una hora; en efecto, el reloj *S* de la nave se mueve respecto a la estación con velocidad v y, por lo tanto, atrasa. Al moverse la nave en el sistema de la estación, la siesta empieza y termina en puntos distintos del espacio; por lo tanto, el tiempo transcurrido entre el inicio y el final de la siesta no es su intervalo de tiempo propio.
El tiempo transcurrido en la nave entre los sucesos (1) y (3), que es su intervalo de tiempo propio, es $\Delta\tau = 1\ h$. La relación entre $\Delta\tau$ y el intervalo de tiempo medido en la estación es,

$$\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1h}{\sqrt{1-(0,6c)^2/c^2}} = \frac{1h}{\sqrt{1-0,36}} = \frac{1h}{\sqrt{0,64}} = 1,25\,h$$

Si los observadores de la estación y de la nave sincronizan sus relojes en el instante t_0 al inicio de la siesta, la hora que marca el reloj de la estación después de ésta es $t_e = t_0$+1,25 y la que indica el de la nave es $t_n = t_0$+1. Por lo tanto, de acuerdo con los observadores de la estación, el reloj de la nave atrasa la cantidad,

$$t_{retraso} = t_e - t_n = (t_0 + 1,25) - (t_0 + 1) = 0,25\,h = 15\,\text{min}$$