# FÍSICA Y QUÍMICA 1º DE BACHILLERATO

# TEMA 2: ESTUDIO DEL MOVIMIENTO

Autor: Luis A. Cordón Montón
Catedrático de Física y Química
IES "Sancho III el Mayor" (Tafalla)

## 1. Concepto de movimiento

La rama de la Física que estudia el movimiento sin atender a las causas que lo provocan se llama ***Cinemática***.

Para facilitar el estudio del movimiento de los cuerpos, consideraremos a éstos como ***móviles puntuales*** (o ***partículas***); esto es, *objetos que se pueden representar mediante un punto*[1].

*Físicamente un objeto se encuentra en movimiento respecto a otro cuando cambia de posición respecto a él; en caso contrario, decimos que está en reposo.*

El movimiento es pues un concepto relativo porque un objeto puede moverse respecto a otro y estar en reposo en relación a un tercero; por ejemplo, el conductor de un automóvil se encuentra en reposo respecto al volante y se mueve respecto al asfalto. El estado de reposo o de movimiento de un cuerpo depende del objeto de referencia elegido; por ello decimos que el movimiento es relativo: ***no existe el movimiento absoluto***.

*El punto del objeto de referencia respecto al que se describe un movimiento particular recibe el nombre de* ***punto de referencia***. Para fijar la posición de una partícula respecto al punto de referencia se necesita un sistema de coordenadas localizado en ese punto, que recibe el nombre de ***sistema de referencia***[2]***.*** Si la partícula se mueve en una recta es suficiente un único eje para fijar su posición, que viene determinada por una única coordenada. Cuando el movimiento tiene lugar en el plano son necesarios dos ejes, de modo que la posición se determina por dos coordenadas. Por último, si el movimiento es en el espacio hacen falta tres ejes y la posición se precisa con tres coordenadas.

Las magnitudes que se utilizan para describir el movimiento de los cuerpos son: ***posición***, ***desplazamiento***, ***velocidad***, ***aceleración*** y ***tiempo***.

*El lugar geométrico de las sucesivas posiciones que ocupa una partícula en su movimiento a lo largo del tiempo define una línea denominada* ***trayectoria***.

El movimiento de una partícula queda completamente descrito cuando se conoce su posición en función del tiempo respecto a un sistema de referencia dado. Conocida la posición en función del tiempo, podemos averiguar todo lo que deseemos.

## 2. Movimiento rectilíneo

Los movimientos más sencillos de describir son los rectilíneos; es decir, los que llevan trayectorias rectas. Sin embargo, dentro de esta limitación podemos considerar una amplia gama de situaciones reales: el movimiento de un electrón en un tubo de rayos catódicos, el deslizamiento de un disco de hockey en una superficie de hielo, la caída de una piedra, etc.

---

[1] La *partícula* no es más que un ***modelo*** que facilita el estudio del movimiento.

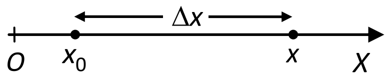
[2] En realidad, el conjunto de todos los sistemas de coordenadas que se encuentran en reposo relativo representan el mismo sistema de referencia; esto se debe a que el movimiento de una partícula que se observa desde cada uno de ellos es el mismo, aunque la posición cambie de uno a otro.

En adelante, mientras no se diga lo contrario, supondremos que la partícula móvil se mueve a lo largo del el eje *OX* del sistema de coordenadas elegido.

### 2.1. Desplazamiento y velocidad

#### 2.1.1. Desplazamiento

La figura muestra una partícula móvil[3] que está en la posición $x_0$ en el instante $t_0$ y en la posición $x$ en el instante $t$. *La variación de la posición de la partícula en el intervalo*[4] $\Delta t = t - t_0$ *es* $\Delta x = x - x_0$, *que recibe el nombre de* ***desplazamiento***. Observa que,




$$\Delta x > 0 \text{ si } x > x_0 \text{ y } \Delta x < 0 \text{ si } x < x_0.$$

De la figura se deduce que si $\Delta x > 0$, el móvil se mueve (globalmente) en el sentido en el que se ha orientado en eje; decimos entonces que el movimiento tiene lugar en el sentido positivo del eje. Por el contrario, si $\Delta x < 0$, el movimiento es opuesto y decimos que tiene lugar en el sentido negativo del eje.

Observa que la posición de la partícula cambia a medida que se mueve a lo largo del eje *OX*. Es decir, la posición es una función del tiempo y se escribe como $x(t)$.

#### 2.1.2. Velocidad

Un concepto básico en el estudio de la Cinemática es el de *rapidez*. Sabemos que si dos objetos móviles parten del mismo punto en el mismo instante y siguen el mismo camino, llegará más lejos, en el mismo tiempo, el que se mueva con mayor rapidez. Para medir la rapidez de un móvil se introduce el concepto de *velocidad*.

Se define la ***velocidad media*** ($v_m$) *de la partícula en un intervalo de tiempo* $\Delta$t *como el cociente entre el desplazamiento efectuado y el intervalo de tiempo empleado;* es decir,

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

La velocidad media puede ser positiva o negativa. Un valor positivo indica un movimiento global en el sentido positivo del eje y uno negativo revela un movimiento en sentido opuesto. De la definición se desprende que la unidad de la velocidad en el SI es el *m*/*s*.

La interpretación del cociente anterior nos lleva a afirmar que velocidad media es *el desplazamiento medio realizado por unidad de tiempo en el intervalo* $\Delta t$, que *es una medida de la rapidez media con la que se desplaza la partícula*; esto es, *de la rapidez media con la que cambia su posición*.

Para entender esto supongamos un móvil que recorre 9 *m* en 3 *s*; su velocidad media en ese intervalo es pues de 3 *m/s*, lo que no significa que haya recorrido 3 *m* cada segundo, sino que por término medio se ha desplazado 3 *m* cada segundo. Pudiera ser que hubiese recorrido 1 *m* en el primer segundo, 6 *m* en el segundo y

[3]Designaremos por $t_0$ al instante en el que se empieza a contar el tiempo (*instante inicial*) y por $x_0$ a la posición de la partícula en dicho instante (*posición inicial*).

[4]Es costumbre utilizar la letra griega $\Delta$ (delta mayúscula) para representar la variación (o incremento) de una magnitud; así pues, la variación de *x* se escribe $\Delta x$.

2 $m$ en el tercero, cuyo valor medio es 3.

La velocidad media no informa sobre la rapidez de un movimiento en un instante particular. Interesa pues introducir una nueva magnitud, que llamaremos *velocidad instantánea*, que lo haga.

La velocidad media hallada en un intervalo de tiempo $\Delta t$ a partir de un instante particular $t$ mide la rapidez media durante dicho intervalo. Entonces, si queremos obtener información sobre la rapidez en el instante $t$, parece razonable calcular la velocidad media, a partir de $t$, en un $\Delta t$ tan pequeño como sea posible. Cuanto menor sea $\Delta t$, más próximo estará el valor hallado al de la medida de la rapidez en el instante $t$. La dificultad que se plantea es que por muy pequeño que sea $\Delta t$ siempre existe otro menor; por lo que el cociente $\Delta x/\Delta t$ nunca alcanza la medida de la rapidez en el instante $t$.

El problema de cómo calcular el cociente $\Delta x/\Delta t$ para un $\Delta t$ muy pequeño, de modo que exprese exactamente la medida de la rapidez en el instante $t$, se puede resolver mediante lo que los matemáticos denominan *proceso de paso al límite*, como vamos a comprobar con el ejemplo que se describe a continuación.

Dejemos caer libremente una bola de acero desde una altura de 8 $m$ y midamos los desplazamientos a partir de un instante particular $t$, por ejemplo 0,5 $s$, en intervalos de tiempo cada vez más pequeños. La tabla recoge los intervalos de tiempo, los desplazamientos correspondientes y la velocidad media en cada intervalo.

| $\Delta t(s)$ | 0,40 | 0,25 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta x(m)$ | 2,80 | 1,56 | 0,55 | 0,26 | 0,10 | 0,05 | 0,005 | 0,0005 |
| $v_m(m/s)$ | 7,00 | 6,24 | 5,50 | 5,25 | 5,10 | 5,05 | 5,005 | 5,0005 |

Se ve que, a medida que $\Delta t$ se hace menor, la velocidad media se aproxima cada vez más a 5 $m/s$. Por lo tanto, está claro que el *valor límite* al que tiende el cociente $\Delta x/\Delta t$ cuando $\Delta t$ se aproxima a cero[5] es 5; es decir, por muy pequeño que sea $\Delta t$, el cociente $\Delta x/\Delta t$ (obtenido a partir del instante $t$ = 0,5 $s$) nunca puede ser inferior a cinco. Los matemáticos llaman a este valor límite, ***derivada*** de la función $x(t)$ respecto a $t$ y se puede expresar de cualquiera de las siguientes formas,

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

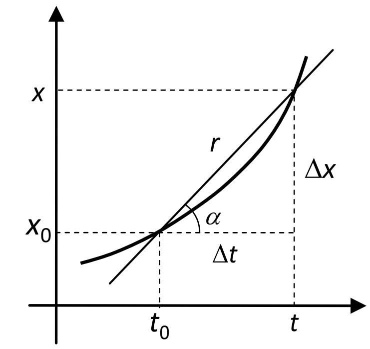
$dt$ (leído *diferencial de t*) representa un intervalo de tiempo más pequeño que cualquier otro que podamos imaginar y $dx$ (leído *diferencial de x*) representa el desplazamiento (también más pequeño que cualquier otro[6]) efectuado por la partícula en $dt$. Podemos interpretar al límite del cociente anterior (es decir, a la derivada) como el cociente entre $dx$ y $dt$.
Observa que la derivada de la posición de la partícula respecto al tiempo en un instante particular $t$ es realmente una medida de la rapidez con que cambia su posición en ese instante.

[5]En el lenguaje matemático esto se escribe así, $\Delta t \to 0$.
[6]Estas variaciones o incrementos más pequeños que cualquier otro reciben el nombre genérico de *infinitesimales*.

Se define la ***velocidad instantánea*** ($v$) *de la partícula en un instante particular t* como *la derivada de la posición respecto al tiempo en ese instante*; esto es,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

En adelante, cuando se hable de velocidad se entenderá que es la instantánea.




### 2.1.3. Interpretación geométrica de la velocidad

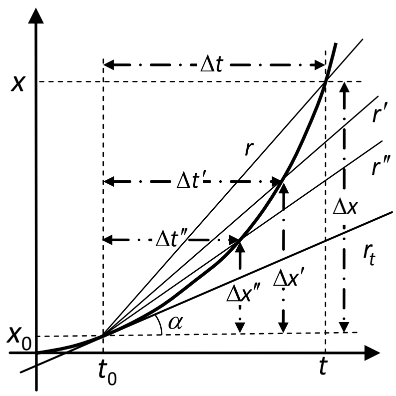
La figura muestra la gráfica $x/t$ de un movimiento que efectúa un desplazamiento $\Delta x = x - x_0$ en un intervalo de tiempo $\Delta t = t - t_0$. El eje de abscisas representa tiempos y el de ordenadas posiciones. La recta $r$ es la secante a la gráfica entre los instantes $t_0$ y $t$, y la tangente del ángulo $\alpha$ es, por definición, la pendiente ($m$) de la recta, entonces,

$$m = \tan\alpha = \frac{x - x_0}{t - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Puesto que $v_m = \Delta x / \Delta t$, se deduce que,

$$v_m = m = \tan\alpha$$

por lo tanto, *podemos interpretar geométricamente a la velocidad media en el intervalo* $\Delta t = t - t_0$ *como la pendiente de la recta secante a la gráfica x/t entre los instantes* $t_0$ *y t.*




Abordemos ahora la velocidad instantánea. En la figura se observa que a medida que se consideran intervalos de tiempo menores ($\Delta t, \Delta t', \Delta t'' \cdots$), los desplazamiento son también más pequeños ($\Delta x, \Delta x', \Delta x'', \cdots$) y las sucesivas secantes ($r', r', r'', \cdots$) se aproximan más a la recta tangente a la gráfica en el instante $t_0$ ($r_t$). De modo que en el límite, cuando $\Delta t \to 0$, se confunde con ella. Así que,

$$m = \tan\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

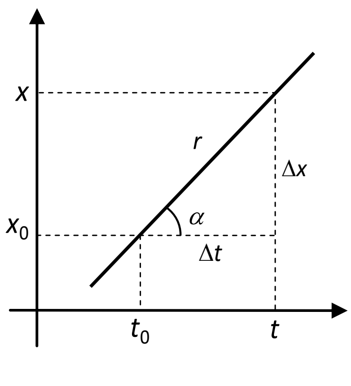
Ahora bien, como, por definición, la velocidad instantánea es,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

se obtiene al comparar las dos ecuaciones que,

$$v = m = \tan\alpha$$

por lo que, *desde el punto de vista geométrico, la velocidad en un instante particular es la pendiente de la recta tangente a la gráfica x/t en ese instante*[7].




### 2.1.4. Interpretación física de la velocidad

Sea un movimiento cuya representación gráfica $x/t$ es una línea recta, como refleja la figura. Ahora la tangente a la gráfica en cualquier instante es la misma y coincide con la recta que representa al movimiento. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es constante y su valor en un intervalo de tiempo $\Delta t$ en el que la partícula ha efectuado un desplazamiento $\Delta x$ es,

[7]Por analogía se deduce que cualquier magnitud definida como la derivada de otra respecto al tiempo tiene una interpretación geométrica análoga a la de la velocidad.

$$m = \tan\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} = cte$$

Como $v = \tan\alpha$ y $v_m = \Delta x / \Delta t$ tenemos, al combinar las ecuaciones, que,

$$v = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = cte$$

La velocidad instantánea es constante y coincide con la media[8] cuando la representación gráfica *x*/*t* es una línea recta. Este tipo de movimiento rectilíneo se llama ***uniforme***.
El hecho de que el cociente $\Delta x / \Delta t$ sea constante significa que el desplazamiento y el tiempo son directamente proporcionales.

Para entender el significado físico de la velocidad cuando es constante, despejemos $\Delta x$ en la ecuación $v = \Delta x / \Delta t = cte$ y hagamos $\Delta t = 1$,

$$\Delta x = v\,\Delta t = v \times 1 = v = cte$$

por lo que *la velocidad instantánea (cuando es constante) es el desplazamiento (constante) efectuado en una unidad de tiempo.* (**PI**)
Por ejemplo, si una partícula mantiene su velocidad constante e igual a 5 *m/s*, significa que recorrerá 5 *m* cada segundo.

Para entender el significado físico de la velocidad instantánea cuando cambia de un instante a otro, supongamos que la velocidad de una partícula en un instante particular *t* es, por ejemplo, de 10 *m/s*. Hagamos la siguiente pregunta: ¿qué ocurriría si mantuviera esa velocidad constante? La respuesta, de acuerdo con el párrafo anterior, es clara: a partir del instante *t* recorrería 10 *m* cada segundo. Así pues, concluimos que, *la velocidad en un instante dado t es el desplazamiento que se efectuaría, a partir de t, en una unidad de tiempo, si dicha velocidad permaneciera constante; es decir, si el desplazamiento fuera proporcional al tiempo.* (**PII**)

En muchos textos de Física se puede encontrar la siguiente definición de velocidad: *desplazamiento realizado (o distancia recorrida*[9]*) por unidad de tiempo.*
Esta definición es correcta y no se contradice con lo que se ha visto, simplemente tiene dos interpretaciones posibles:
a) Si la velocidad es *constante*, tiene el significado del párrafo. (**PI**)
b) Si la velocidad *no es constante*, la definición se refiere a un instante particular *t* y tiene el significado del párrafo. (**PII**)
Hay muchas magnitudes físicas (además de la velocidad) que se definen como la derivada de otra magnitud respecto al tiempo, por lo que *se pueden interpretar de forma análoga a ella*. Dos de éstas son la *aceleración* (que vamos a ver en el siguiente punto) y la *potencia.*
El trabajo realizado por una fuerza es una magnitud que depende del tiempo. Su derivada respecto a éste en un instante particular es la *potencia* y, de acuerdo con

[8]Esto es análogo a la altura de un conjunto de individuos. Si todos son iguales, la altura media del conjunto coincide con la de cada uno de ellos.

[9]A veces en la definición aparece *distancia* en lugar de *desplazamiento*, que no es lo mismo. La distancia siempre es positiva mientras que el desplazamiento puede ser positivo o negativo. Por lo tanto, la distancia recorrida por unidad de tiempo no es exactamente la velocidad, sino su valor absoluto que se llama ***celeridad*** y que, al ser positiva, no informa del sentido del movimiento.

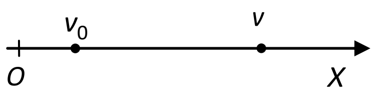
el significado de derivada, mide la rapidez con la que la fuerza realiza el trabajo en ese instante; esto es, expresa el trabajo realizado por unidad de tiempo.

### 2.2. Aceleración

Ya que la velocidad de un móvil puede variar, parece lógico introducir una nueva magnitud que mida la rapidez de dichos cambios; esta magnitud recibe el nombre de *aceleración*. Un movimiento se denomina *variado* cuando su velocidad cambia; si el valor absoluto de $v$ (esto es, la celeridad) aumenta, se dice que es un movimiento *acelerado* y si disminuye, que es *decelerado*.

Queremos que la aceleración mida la rapidez con la que cambia la velocidad, al igual que la velocidad mide la rapidez del cambio de la posición (es decir, del desplazamiento). Por lo tanto, hay que definirla de forma análoga a la velocidad, sin más que sustituir "posición" por "velocidad". Los resultados y las interpretaciones obtenidos para la velocidad se pueden aplicar a la aceleración, cambiando "posición" por "velocidad".

Sea una partícula que se mueve en el eje *OX* de un sistema de coordenadas y que lleva una velocidad inicial $v_0$ en el instante inicial $t_0$ y una velocidad $v$ en otro instante $t$ (ver figura).



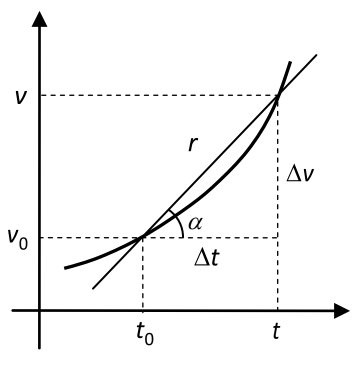

Se define la ***aceleración media*** ($a_m$) *de la partícula en un intervalo de tiempo* $\Delta t$ *como el cociente entre la variación de la velocidad* $\Delta v$ *y el intervalo de tiempo empleado*; es decir,

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \quad \Rightarrow \begin{cases} a_m > 0 \ si \ v > v_0 \\ a_m < 0 \ si \ v < v_0 \end{cases}$$

por lo que el signo de $a_m$ indica si, globalmente, la velocidad aumenta o disminuye. De la definición se deduce que la unidad de la aceleración en el SI es el $m/s^2$.

Aplicando los resultados y las interpretaciones obtenidos para la velocidad media a la aceleración (cambiando "posición" por "velocidad") se concluye que:

a) *La aceleración media en un intervalo* $\Delta t$ *es la variación media de la velocidad por unidad de tiempo en ese intervalo, que es una medida de la rapidez media del cambio de velocidad.*
Ejemplo, supongamos que un móvil, cuya velocidad en el instante $t$ = 5 *s* es 10 *m/s*, lleva una aceleración media de 3 $m/s^2$ durante 2 *s*. Esto significa que su velocidad aumenta por término medio en 3 *m/s* cada segundo; es decir, que su velocidad en el instante $t = 5 + 1 + 1 = 7 s$ es $v = 10 + 3 + 3 = 16\ m/s$. Lo que no quiere decir la velocidad haya variado exactamente en 3 *m/s* cada segundo. Puede ocurrir, por ejemplo, que aumente en 4 *m/s* el primer segundo y en 2 *m/s* el segundo; ya que el valor medio es 3.




b) Podemos interpretar geométricamente a la aceleración media en el intervalo $\Delta t = t - t_0$ como *la pendiente de la recta secante a la gráfica v/t entre los instantes* $t_0$ *y t.* O sea, (ver figura),

$$m = \tan\alpha = \frac{v - v_0}{t - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a_m$$

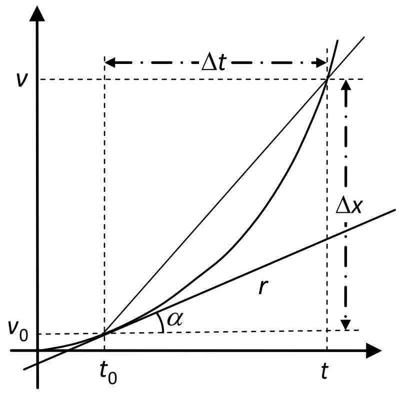
Al igual que ocurría con la velocidad, la aceleración media no informa de la rapidez del cambio de la velocidad en un instante particular. Siguiendo un proceso análogo al desarrollo en el estudio de la velocidad, concluimos que para conocer la rapidez del cambio de la velocidad en un instante *t*, hemos de calcular el límite de la velocidad media cuando $\Delta t \to 0$ en el instante *t*; esto es, la derivada de la velocidad respecto al tiempo.

Se define la ***aceleración instantánea*** (*a) de la partícula en un instante particular t* como *la derivada de la velocidad respecto al tiempo en ese instante*; esto es,

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

En adelante, cuando se hable de aceleración se entenderá que nos referimos a la instantánea.

Aplicando los resultados y las interpretaciones obtenidos para la velocidad instantánea a la aceleración (cambiando "posición" por "velocidad") se concluye que:




a) *La aceleración en un instante particular t es la variación que experimentaría la velocidad del móvil, a partir de t, en una unidad de tiempo, si dicha aceleración permaneciera constante e igual a la del instante t; es decir, si la variación de la velocidad fuera proporcional al tiempo.* (**PIII**)

b) *Geométricamente, la aceleración en un instante t es la pendiente de la recta tangente a la gráfica v/t en ese instante* (ver figura).

c) En el caso particular de que la aceleración sea constante en un intervalo de tiempo $\Delta t$, se cumple que,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a_m = cte$$

por lo que la aceleración instantánea coincide con la media. Así que, cuando **la aceleración es constante**, tenemos que,

- *La variación de la velocidad y el tiempo son directamente proporcionales (ya que su cociente es constante).*
- *Físicamente la aceleración es el cambio constante de la velocidad efectuado en cada unidad de tiempo*. (**PIV**)

Por ejemplo, sea un móvil que en el instante *t* = 5 *s* lleva una velocidad de 4 *m/s* y que su aceleración es constante e igual a 2 $m/s^2$. Esto significa que su velocidad será de 6 *m/s* en el instante *t* = 6 *s*, de 8 *m/s* en *t* = 7 *s*, …

d) Podemos definir con palabras la aceleración como *la variación de la velocidad por unidad de tiempo.* Esta definición tiene el significado del párrafo (PIV) si la aceleración es constante y el significado del (PIII) si no lo es.

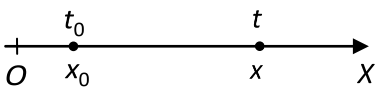
e) La derivada *dv/dt* en un instante particular *t* se puede interpretar como el cociente entre la variación infinitesimal que experimenta la velocidad (*dv*) y el intervalo de tiempo, también infinitesimal (*dt*) a partir de *t*, en el que se produce esa variación.

De las definiciones de velocidad y aceleración se deduce que el movimiento es acelerado si los signos de *a* y de *v* son iguales, mientras que es decelerado si son distintos.

## 3. Algunos movimientos rectilíneos importantes

Como ya se ha mencionado, el movimiento de una partícula queda descrito cuando se conoce la posición de la misma en función del tiempo. Si el movimiento se da en el eje *OX*, la ecuación que lo describe es de la forma, $x = x(t)$.

### *3.1. Rectilíneo uniforme (MRU)*




El movimiento rectilíneo más sencillo es el que mantiene constante la velocidad, por lo que no existe aceleración. En este caso (ver figura), si la partícula está en el punto $x_0$ en el instante $t_0$ y en el punto $x$ en $t$, tenemos, al ser $v$ = cte, que,

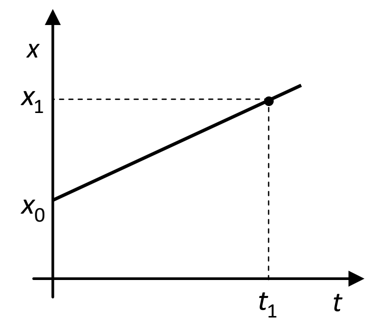
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

y despejando la posición $x$, se llega a,

$$\boxed{x = x_0 + v(t - t_0)}$$

que es la ecuación del MRU. Si convenimos en "poner a cero" nuestro reloj cuando empezamos a contar el tiempo, entonces $t_0 = 0$ y la ecuación se simplifica a,

$$\boxed{x = x_0 + vt} \quad (1)$$



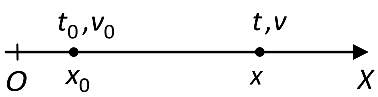

Si $v > 0 \Rightarrow x > x_0$, el móvil se mueve en el sentido positivo del eje; si, por el contrario, $v < 0 \Rightarrow x < x_0$, el móvil se mueve en el sentido negativo.

La ecuación (1) es la de la recta, por lo que la gráfica que se obtiene al representar $x$ en función de $t$ es una recta, como se ve en la figura.

En el caso de que el movimiento tuviera lugar en el eje *OY*, las ecuaciones serían,

$$\boxed{y = y_0 + v(t - t_0)} \quad \text{y} \quad \boxed{y = y_0 + vt}$$

### *3.2. Rectilíneo uniformemente variado (MRUV)*




Describiremos ahora el movimiento rectilíneo con aceleración constante en el tiempo.

Supongamos que la partícula de la figura lleva una velocidad inicial $v_0$ en el instante inicial $t_0$ y que alcanza una velocidad $v$ en el instante $t$. Puesto que la aceleración es constante, tenemos que,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

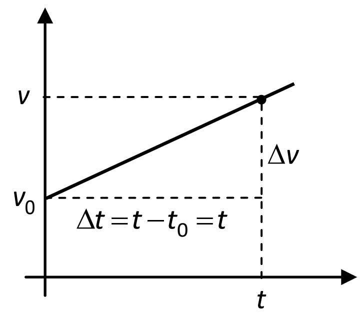
y despejando $v$, se obtiene,

$$\boxed{v = v_0 + a(t - t_0)}$$

que es la ecuación que expresa la velocidad en función del tiempo. Si, como hemos hecho en el MRU, convenimos en "poner a cero" nuestro reloj cuando empezamos a contar el tiempo, entonces $t_0 = 0$ y la ecuación se reduce a,

$$\boxed{v = v_0 + at} \quad (2)$$

De la ecuación se deduce que si $v$ y $a$ tienen el mismo signo en un instante particular, la celeridad (el valor absoluto de $v$) aumenta y el movimiento es acelerado. Si tienen signos opuestos, la celeridad disminuye y el movimiento es de celerado.




La representación de $v$ frente a $t$ es una línea recta porque la ecuación (2) es la de la recta. El valor de la ordenada (si $t_0$ = 0) representa el valor de $v_0$, como se ilustra en la figura. En este caso, al ser $\Delta v$ directamente proporcional a $\Delta t$, la velocidad media de la partícula se da exactamente en el instante intermedio entre $t_0$ y $t$ y es igual al valor medio de las velocidades en dichos instantes; o sea,

$$v_m = (v + v_0)/2$$

despejando $v$ de la ecuación y combinándola con la de la velocidad instantánea,

$$\left.\begin{aligned} v &= 2v_m - v_0 \\ v &= v_0 + at \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_0 + at = 2v_m - v_0 \Rightarrow v_m = v_0 + ½at$$

y usando la ecuación que define la velocidad media, para $t_0$ = 0, se tiene que,

$$\left.\begin{aligned} v_m &= v_0 + ½at \\ v_m = \Delta x/\Delta t &= (x - x_0)/t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x - x_0}{t} = v_0 + ½at$$

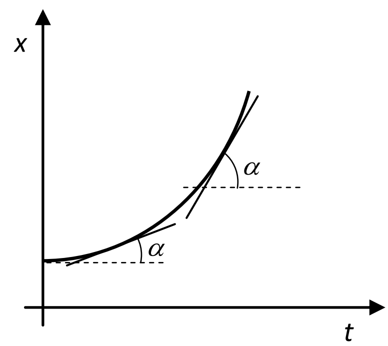
por lo que, despejando $x$, se llega a,

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + ½at^2} \quad (3)$$

que es la ecuación del MRUV en el caso particular de que $t_0$ = 0.

Si el movimiento tiene lugar en eje $OY$, la ecuación sería,

$$\boxed{y = y_0 + v_0 t + ½at^2}$$




La ecuación del movimiento es la de una parábola, por lo tanto, la representación gráfica de la posición frente al tiempo es una parábola[10], como se ve en la figura.

La interpretación geométrica de la derivada da información adicional del movimiento a partir de la representación gráfica $x/t$. Por ejemplo, vemos en la figura que la pendiente de la recta tangente a la gráfica es mayor al aumentar el tiempo, lo que significa que la velocidad aumenta; es decir, que se trata de un movimiento acelerado.

Al despejar $t$ en la ecuación de la velocidad, se obtiene,

$$t = (v - v_0)/a$$

que expresa $t$ en función de $v$ y $a$. Llevando este valor de $t$ a la ecuación del movimiento, tenemos,

$$x = x_0 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = x_0 + \frac{(v_0 v - v_0^2)}{a} + \frac{1}{2}\frac{(v^2 - 2v_0 v + v_0^2)}{a}$$

pasando $x_0$ y $a$ al primer miembro y recordando que $\Delta x = x - x_0$,

$$a\Delta x = (v_0 v - v_0^2) + \frac{1}{2}(v^2 - 2v_0 v + v_0^2) = \cancel{v_0 v} - v_0^2 + \frac{v^2}{2} - \cancel{v_0 v} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right)$$

por lo que, finalmente, queda,

[10]En realidad una rama de parábola, pues $t$ sólo puede tomar valores positivos.

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x}$$

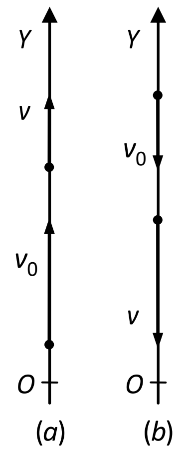
que expresa *x* en función de *v* y de *a*, y que resulta útil en los problemas cuando no se da el tiempo en forma explícita.

Si el movimiento se diera en el eje *OY*, la ecuación hallada se escribiría como,

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y}$$

***Movimiento de caída y ascenso libres***

Un MRUV particularmente importante es la caída (o ascenso) libre de un objeto que está cerca de la superficie terrestre; su aceleración, provocada por la fuerza de la gravedad, es constante y su valor absoluto (que se representa por la letra *g*) es aproximadamente $g = 9{,}81\ m/s^2$.




Hagamos que el movimiento tenga lugar en el eje *OY* de un sistema de coordenadas y orientemos éste hacia arriba, como se ve en las figuras. De la ecuación de la velocidad se obtiene que,

$$v = v_0 + at \;\Rightarrow\; a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{\Delta v}{t}$$

Observa que en el movimiento de ascenso (figura a) *v* y $v_0$ son positivas porque la partícula se mueve en el sentido del eje, mientras que $v < v_0 \Rightarrow \Delta v < 0 \Rightarrow a < 0$.

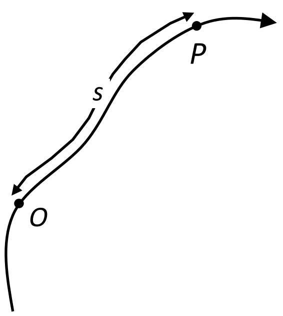
Por su parte en el movimiento de caída (figura b) *v* y $v_0$ son negativas porque el movimiento se da en sentido opuesto, por lo tanto $v < v_0$[11] $\Rightarrow \Delta v < 0 \Rightarrow a < 0$.

Si designamos por la letra *g* al valor absoluto de la aceleración de la gravedad; esto es, al valor de la gravedad sin el signo, tenemos que,

$$a = -g \;\Rightarrow\; \boxed{v = v_0 - gt} \quad \boxed{y = y_0 + v_0 t - ½gt^2} \;\text{ y }\; \boxed{v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y}$$

que son las ecuaciones del movimiento de la caída y del ascenso libres.

## 4. Ley horaria de un movimiento




La figura muestra la trayectoria de una partícula móvil que lleva un movimiento curvilíneo. Para determinar su posición, sobre la propia trayectoria, respecto a un punto de referencia de la misma *O*, se procede igual que en los ejes coordenados:

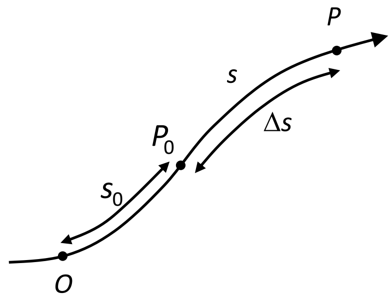
a) Ya que la trayectoria se puede recorrer en dos sentidos, se elige uno de ellos como positivo (se indica con una punta de flecha).
b) La posición de un punto *P* en la trayectoria, que se representa con la letra *s*, queda determinada por la distancia de *P*, medida sobre la trayectoria, a *O* con signo positivo si *P* está en el lado positivo y con signo negativo en caso contrario. En el ejemplo de la figura, *s > 0*.

Puesto que la velocidad instantánea (*v*) se define como la derivada de la posición respecto al tiempo, tenemos para un movimiento curvilíneo particular,

$$v = ds/dt$$

[11]Esto es así porque las velocidades son negativas y, en la caída, su valor absoluto aumenta. Observa, por ejemplo, que –6 > –9.

que tiene el mismo significado que la del movimiento rectilíneo; es decir, *expresa el desplazamiento realizado por la partícula a lo largo de la trayectoria por unidad de tiempo en un instante particular t*, que es una medida de su rapidez en ese instante. Esta velocidad, que no informa de la dirección del movimiento, se denomina a veces ***velocidad escalar***.




Sea una partícula que se mueve siguiendo la trayectoria curvilínea, tal y como muestra la figura. Supongamos que su posición sobre la trayectoria es $s_0$ en el instante $t_0$ y $s$ en el instante $t$; entonces, el desplazamiento realizado a lo largo de la trayectoria[12] en el intervalo $\Delta t = t - t_0$ ha sido $\Delta s = s - s_0$.

Si el desplazamiento realizado es directamente proporcional al tiempo, podemos aplicar las ecuaciones del MRU sustituyendo *x* ó *y* por *s*; por lo tanto,

$$s = s_0 + v(t - t_0) \quad \text{y} \quad s = s_0 + vt$$

Así mismo, si la velocidad varía pero su cambio es proporcional al tiempo, podemos aplicar las ecuaciones del MRUV; entonces,

$$v = v_0 + at\,; \quad s = s_0 + v_0 t + ½at^2 \quad \text{y} \quad v^2 - v_0^2 = 2a\Delta s$$

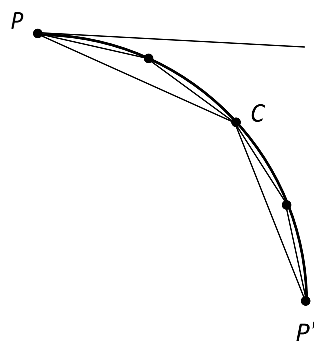
Observa que las ecuaciones en *s* expresan la posición de la partícula sobre la trayectoria en función del tiempo; o sea, $s = s(t)$. No obstante, hay una diferencia importante entre estas ecuaciones y sus análogas de los movimientos rectilíneos en ejes coordenados. En efecto, cuando el movimiento tiene lugar en un eje de coordenadas, la dirección del mismo y su trayectoria están ya fijados. El signo de la velocidad indica el sentido del movimiento y la ecuación $x = x(t)$ (ó $y = y(t)$) determina la posición de la partícula respecto al origen del sistema de coordenadas. En el caso que nos ocupa, la ecuación $s = s(t)$ determina la posición de la partícula respecto al punto *O* medida a lo largo de la trayectoria y si está en la parte positiva o negativa de la misma. Si no conocemos de antemano la trayectoria del móvil, no tiene utilidad alguna, puesto que no determina la posición de la partícula respecto de un sistema de coordenadas fijado en el punto *O*. La ecuación $s = s(t)$ se denomina de ***ley horaria del movimiento***.

Está claro que la dirección en la que se mueve un móvil cuya trayectoria es una recta es la de esa recta. Tampoco hay duda de que si la trayectoria es curva, la dirección cambia continuamente; pero, ¿cuál es la dirección del movimiento en cada punto de la trayectoria?

Supongamos una partícula que se mueve del punto *P* al *P′* a lo largo de la curva *C*, como se ve en la figura de la página siguiente. Podemos hacer que la partícula se mueva en línea recta desde *P* hasta un punto intermedio de *C* y después, también en línea recta, desde ese punto intermedio hasta *P′* (ver figura); en cada uno de los tramos rectos la dirección del movimiento es la de la correspondiente recta. Podemos continuar el proceso eligiendo tres puntos de la trayectoria curva *C* y obligando a la partícula a moverse siguiendo trayectorias rectilíneas desde *P* al primero de ellos, de éste al segundo, de éste al tercero y desde éste a *P′*. Este proceso se puede continuar indefinidamente.

La figura muestra que, a medida que el número de puntos sobre la trayectoria aumenta, la dirección del tramo rectilíneo que une *P* con el primero de ellos se aproxima más a la de la recta tangente a la trayectoria en el punto *P*. De modo que, en el límite, cuando el número de puntos marcados tiende a infinito, se confunde con ella.

Concluimos que *la dirección del movimiento de una partícula móvil con movimiento curvilíneo en un punto particular de la trayectoria es la de la tangente a la curva en ese punto*.




[12]El desplazamiento a lo largo de una trayectoria se define como la diferencia entre las posiciones final e inicial; esto es, $\Delta s = s - s_0$. Expresa la distancia entre $s_0$ y $s$ medida a lo largo de la trayectoria, con signo positivo si el movimiento ha tenido lugar en el sentido en que se ha orientado el eje y con negativo en caso contrario.

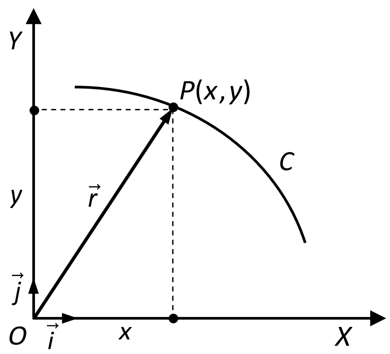
# 5. Estudio vectorial del movimiento

La ley horaria de un movimiento curvilíneo, que es una ecuación escalar, no aporta suficiente información sobre el mismo. En efecto, si no conocemos de antemano la trayectoria del móvil, tampoco podemos determinar su posición respecto a un sistema de referencia dado; por otro lado, como hemos dicho, la velocidad escalar no informa de la dirección del movimiento. Esto sugiere efectuar un estudio más profundo, que se logra introduciendo las magnitudes *vectoriales posición*, *desplazamiento*, *velocidad* y *aceleración*.

La ecuación que expresa la posición de una partícula que lleva un movimiento curvilíneo en función del tiempo respecto a un sistema de referencia, recibe el nombre de ***ecuación del movimiento***. Es una ecuación vectorial de la que se puede obtener toda la información del movimiento en cada instante. Como cualquier ecuación vectorial, se puede expresar en forma de componentes respecto a un sistema de coordenadas particular.

Un vector, que geométricamente es un segmento de recta orientado en el espacio, puede representar a magnitudes vectoriales tales como la velocidad o la aceleración si convenimos en que una unidad de longitud de dicho vector represente una cantidad dada de magnitud. Así por ejemplo, un vector de 6 *cm* de longitud representa correctamente una cantidad de velocidad de 18 *m/s* si previamente hemos convenido en que 1 *cm* de longitud equivalga a una velocidad de 3 *m/s*.
A veces, en los libros de Física se sustituye la palabra "cantidad" por "magnitud". En nuestro caso "cantidad de velocidad" y "magnitud de la velocidad" tienen el mismo significado.

## 5.1. Vectores de posición y desplazamiento vectorial




La figura muestra una partícula que se mueve en el plano respecto al sistema de referencia *OXY* siguiendo una trayectoria *C*. Su posición en un punto *P* de la trayectoria está determinada por sus coordenadas (*x, y*). También el vector fijo $\vec{r}$ (con origen en *O* y extremo en *P*), denominado ***vector de posición***, fija la posición de la partícula respecto a *O*. Como *x* e *y* son también las componentes de $\vec{r}$, tenemos que,

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

Observa que *x* e *y* determinan las posiciones de las proyecciones[13] de la partícula en los ejes *OX* y *OY*.

Conforme la partícula se mueve, el vector de posición y sus componentes varían. Entonces, decimos que $\vec{r}$ es una *función vectorial* del tiempo, y lo escribimos así,

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

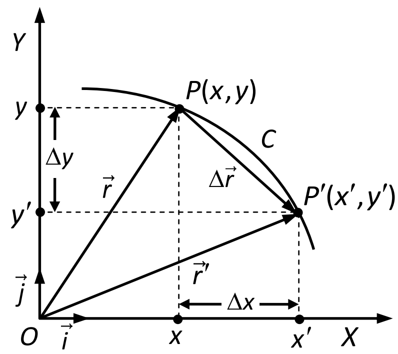
que es la **ecuación del movimiento** de la partícula.

[13] Sean una partícula y un eje, y tracemos una perpendicular al eje que pase por la partícula. La proyección de la partícula sobre el eje es el punto en el que la perpendicular corta al eje.

Cuando el movimiento se da en un plano, siempre podemos colocar los ejes *X* e *Y* de modo que sólo se necesiten dos coordenadas para fijar la posición de la partícula. Si ésta se moviera en el espacio, tendríamos que añadir un eje más para fijar su posición y, por tanto, el vector de posición tendría tres componentes.

En este curso sólo vamos a considerar movimientos en el plano; sin embargo, todas las definiciones y resultados que veamos en adelante son generalizables a movimientos en el espacio.

Supongamos que la partícula se encuentra en el punto *P* en el instante *t* y en el *P′* en el instante *t′*, como se muestra en la figura. Los vectores de posición son, respectivamente, $\vec{r}$ y $\vec{r}'$.




Se define el ***desplazamiento vectorial*** *de la partícula desde el punto P al P' como la magnitud que queda determina cuando se conoce la distancia en línea recta entre P y P' y la dirección y el sentido del movimiento en línea recta desde P a P'.*

En la figura vemos que el desplazamiento puede representarse por el vector $\Delta\vec{r}$. Ahora bien, si tenemos en cuenta las operaciones entre vectores, vemos que,

$$\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r} \;\Rightarrow\; \Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$$

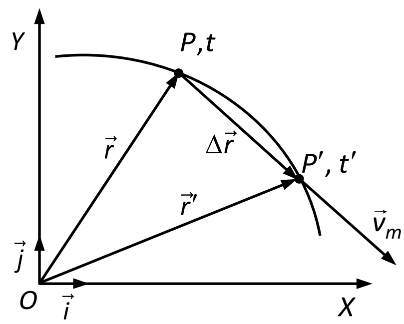
por lo que el *desplazamiento vectorial es igual a la variación que sufre el vector de posición de la partícula entre los puntos P* y *P′*. De la figura se deduce que,

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j} = (x' - x)\,\vec{i} + (y' - y)\,\vec{j}$$

donde $\Delta x = x' - x$ y $\Delta y = y' - y$ son las componentes de $\Delta\vec{r}$ en los ejes *OX* y *OY* respectivamente.

La figura muestra que mientras la partícula se mueve desde *P* hasta *P′*, sus proyecciones en los ejes *OX* y *OY* se desplazan, respectivamente, del punto *x* al *x′* y del *y* al *y′*. Concluimos por lo tanto que *las componentes del vector de posición y del desplazamiento vectorial en los ejes OX y OY del sistema de coordenadas son, respectivamente, las posiciones de las proyecciones de la partícula en dichos ejes y los desplazamientos que realizan.*

### *5.2. Velocidad vectorial*




En la figura se indica la trayectoria seguida por una partícula. En el instante *t* se encuentra en el punto *P* y su vector de posición es $\vec{r}$; mientras que en el instante *t′* se ha movido al *P′* y su vector de posición es $\vec{r}'$.

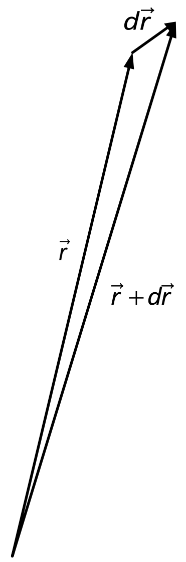
Se *define la* ***velocidad vectorial media*** *(*$\vec{v}_m$*) de la partícula en el intervalo de tiempo* $\Delta t = t' - t$ *como el cociente entre el desplazamiento vectorial* $\Delta\vec{r}$ *efectuado entre los instantes t y t′ y el intervalo de tiempo empleado*; es decir,

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

por lo que $\vec{v}_m$ es una magnitud vectorial de igual dirección y sentido que $\Delta\vec{r}$.

Se define la ***velocidad vectorial instantánea*** ($\vec{v}$) *de la partícula, en el instante t, como el límite de la velocidad vectorial media cuando el intervalo de tiempo* $\Delta t$ *tiende a cero*; es decir,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

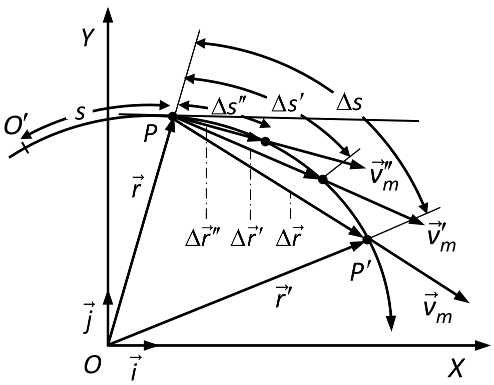



Los matemáticos llaman a este límite *derivada del vector de posición* $\vec{r}(t)$ *respecto al tiempo.* En Física se escribe así,

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

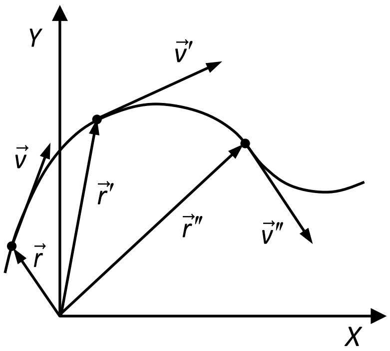
donde, si interpretamos a la derivada como un cociente, *dt* representa un intervalo de tiempo infinitesimal y $d\vec{r}$ el desplazamiento (también infinitesimal) efectuado en *dt*, como indica la figura.

En adelante, para fijar la posición de una partícula sobre cualquier trayectoria convendremos en orientarla en el sentido del movimiento y escogeremos un punto *O′* de la misma como referencia.




La figura muestra que la magnitud del desplazamiento vectorial ($\Delta r$) de una partícula que se mueve desde el punto *P* al *P′* en un intervalo de tiempo $\Delta t$ es menor que el desplazamiento recorrido sobre la trayectoria ($\Delta s$), a menos que la trayectoria sea una recta. Sin embargo, si consideramos intervalos de tiempo ($\Delta t'$, $\Delta t''$, …) cada vez menores, $\Delta r$ se aproxima cada vez más a $\Delta s$, y la dirección de $\Delta\vec{r}$ (que es la misma que la de $\vec{v}_m$) se acerca más y más a la dirección de la recta tangente a la curva en el punto *P*; de modo que en el límite, cuando $\Delta t\to 0$, la dirección de $\Delta\vec{r}$ se confunde con la de la tangente y su magnitud con la distancia real recorrida (es decir, *dr* = *ds*). Como,

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_m=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$




queda claro que *la dirección de la velocidad vectorial en un punto P de la trayectoria es la de la recta tangente a la misma en ese punto.* La figura muestra el vector velocidad en distintas posiciones a lo largo de una trayectoria curva *C*.

Si dos vectores son iguales, también lo son sus módulos; por tanto, de la ecuación de definición de la velocidad tenemos,

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}\Rightarrow v=\frac{dr}{dt}$$

donde *dr* y *v* representan, respectivamente, la magnitud del desplazamiento efectuado en el intervalo de tiempo *dt* y la magnitud de la velocidad vectorial. Ahora bien, en un intervalo de tiempo infinitesimal *dt* se cumple que $dr=ds$; por tanto,

$$\left.\begin{aligned} v=dr/dt \\ dr=ds \end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad v=\frac{ds}{dt}$$

que, según el punto 5, es la velocidad escalar[14]. Es decir, *la magnitud de la velocidad vectorial instantánea mide la rapidez del movimiento de la partícula.*

Podemos afirmar por lo tanto que la orientación de la velocidad vectorial instantánea da la dirección y el sentido del movimiento de la partícula y que su magnitud mide la rapidez con la que se mueve en ese instante.

[14]En realidad *dr/dt* coincide con la velocidad escalar solo cuando ésta es positiva; es decir cuando el movimiento tiene lugar en el sentido que hemos elegido como positivo.

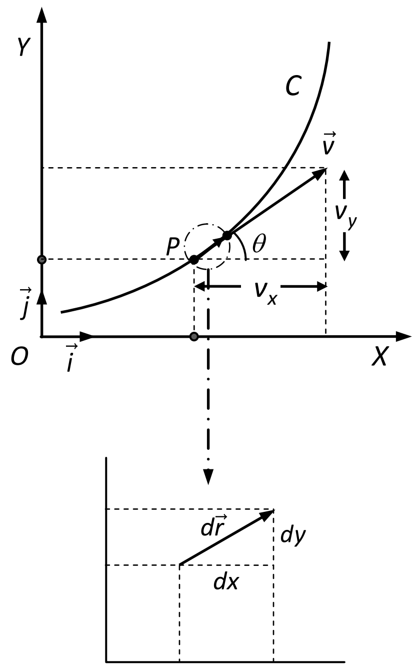
Componentes de la velocidad vectorial

La figura superior de la página siguiente muestra una partícula que se encuentra en el punto *P* en el instante *t* y que lleva una velocidad $\vec{v}$. En un intervalo de tiempo infinitesimal, *dt*, a partir del instante *t*, efectúa un desplazamiento (también infinitesimal) $d\vec{r}$. Los desplazamientos realizados por las proyecciones de la partícula en los ejes coordenados son *dx* y *dy*, como se ve en la figura inferior que muestra el detalle de la superior, por lo que la ecuación,

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j}$$

la podemos escribir como,

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$$




Como la velocidad vectorial instantánea es la derivada del vector de posición; tenemos, interpretando la derivada como un cociente, que,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

Si designamos por $v_x$ y $v_y$ a las componentes de $\vec{v}$ tenemos que,

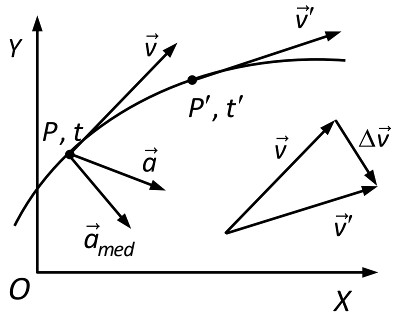
$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \;\Rightarrow\; v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

Sabemos que *x* e *y* son, respectivamente, las posiciones de las proyecciones de la partícula en los ejes *OX* y *OY*. Por lo tanto, de acuerdo con la definición de velocidad instantánea en el movimiento rectilíneo (punto 2.1.2), $v_x$ y $v_y$ son las velocidades de las proyecciones de la partícula en los ejes *OX* y *OY* la velocidad.

Concluimos que las componentes de la velocidad vectorial a lo largo de los ejes coordenados son las velocidades de las proyecciones de la partícula en dichos ejes.

### *5.3. Aceleración vectorial*

En el movimiento curvilíneo la velocidad vectorial, en general, cambia en magnitud y en dirección. Esto sucede, por ejemplo, si aceleramos un automóvil mientras tomamos una curva. La magnitud de la velocidad cambia debido a que la partícula puede acelerar o frenar; su dirección varía porque la velocidad es tangente a la trayectoria y ésta se curva continuamente. En la figura se muestran las velocidades $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ de una partícula en los instantes *t* y *t'*, cuando está en los puntos *P* y *P'* respectivamente. La variación de la velocidad en el intervalo $\Delta t = t' - t$ es,




$$\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$$

como se muestra en el triángulo de vectores dibujado en la figura. Para medir la rapidez del cambio de la velocidad, se introduce la *aceleración vectorial*.

Se define *la* ***aceleración vectorial media*** *($\vec{a}_m$) de la partícula en el intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$ como el cociente entre la variación de la velocidad vectorial $\Delta\vec{v}$ entre los instantes t y t′ y el intervalo de tiempo empleado*; es decir,

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

por lo que $\vec{a}_m$ tiene la misma orientación que $\Delta\vec{v}$.

Se define la ***aceleración vectorial instantánea*** ( $\vec{a}$ ), *en el instante t, como el límite de la aceleración vectorial media cuando el intervalo de tiempo* $\Delta t$ *tiende a cero*,

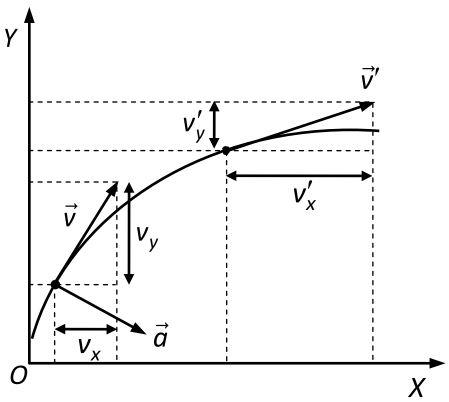
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

que, en el lenguaje matemático, recibe el nombre de derivada de la velocidad vectorial $\vec{v}(t)$ respecto al tiempo y en Física se expresa como,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

donde, si interpretamos a la derivada como un cociente, *dt* representa un intervalo de tiempo infinitesimal, a partir del instante *t*, y $d\vec{v}$ la variación (también infinitesimal) de la velocidad en *dt*. De la definición se desprende que,

La aceleración vectorial tiene la misma orientación que el cambio instantáneo de la velocidad vectorial ( $d\vec{v}$ ). Como la dirección de la velocidad cambia en el sentido en que se curva la trayectoria, la aceleración en el movimiento curvilíneo apunta siempre hacia la concavidad de la curva, como se ve en la figura.
En general, la aceleración no es ni tangencial ni perpendicular a la trayectoria.




Componentes de la aceleración vectorial

Expresando la variación que sufre la velocidad vectorial en un intervalo $\Delta t$ en sus componentes (ver figura) tenemos que,

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v} = \left(v'_x\vec{i} + v'_y\vec{j}\right) - \left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j}\right)$$

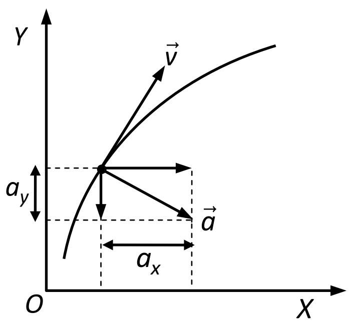
que, al agrupar términos, se transforma en,

$$\Delta\vec{v} = \left(v'_x - v_x\right)\vec{i} + \left(v'_y - v_y\right)\vec{j} = \Delta v_x\,\vec{i} + \Delta\vec{v}_y \quad (1)$$

donde $\Delta v_x$ y $\Delta v_y$ son las componentes escalares de $\Delta\vec{v}$ en los ejes *OX* y *OY* respectivamente. Como se ve en la ecuación (1), *estas componentes son las variaciones de las velocidades de las proyecciones de la partícula en dichos ejes*.

En un intervalo de tiempo infinitesimal (*dt*), a partir del instante *t*, la velocidad y sus componentes sufren una variación también infinitesimal, por lo que, $\Delta\vec{v}$, $\Delta v_x$ y $\Delta v_y$ se transforman, respectivamente en $d\vec{v}$, $dv_x$ y $dv_y$. En estas condiciones la ecuación (1) se puede escribir como,

$$d\vec{v} = dv_x\,\vec{i} + dv_y\,\vec{j}$$




Como la aceleración instantánea es la derivada de la velocidad; tenemos, interpretando la derivada como un cociente, que,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x\,\vec{i} + dv_y\,\vec{j}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j}$$

Si designamos por $a_x$ y $a_y$ a las componentes de $\vec{a}$ (ver figura) tenemos que,

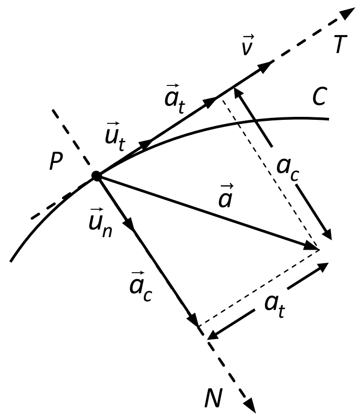
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \;\Rightarrow\; a_x = \frac{dv_x}{dt} \;\text{ y }\; a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Sabemos que $v_x$ y $v_y$ son, respectivamente, las velocidades de las proyecciones de la partícula en los ejes *OX* y *OY*. Así pues, de acuerdo con la definición de aceleración instantánea en el movimiento rectilíneo (punto 2.2), $a_x$ y $a_y$ son las aceleraciones de las proyecciones de la partícula en los ejes coordenados.

Concluimos que las componentes de la aceleración vectorial a lo largo de los ejes coordenados son las aceleraciones de las proyecciones de la partícula en esos ejes.

## *5.4. Componentes intrínsecas de la aceleración*

La aceleración vectorial la podemos descomponer (y es útil hacerlo) en dos: una tangencial a la trayectoria y otra perpendicular. Elijamos un sistema de coordenadas ligado a la partícula, de modo que uno de los ejes (el *tangencial*) tenga la dirección[15] de la tangente *PT* a la trayectoria en cada punto y el otro (el *normal*) sea perpendicular al primero y esté orientado hacia la concavidad de la curva, como ilustra la figura.




Observa que este sistema es muy especial porque, al estar ligado a la partícula, los ejes cambian continuamente de dirección.

Designado, respectivamente, por $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_c$ a las aceleraciones vectoriales componentes en los ejes tangencial y normal, como se ve en la figura, tenemos que,

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

Definiendo los vectores unitarios $\vec{u}_t$ y $\vec{u}_n$ de modo que el primero tenga la orientación del eje tangencial y el segundo la del eje normal (ver figura) y representando por $a_t$ y $a_c$, respectivamente, a las componentes (escalares) de la aceleración en las direcciones de dichos ejes, tenemos que,

$$\vec{a} = a_t \vec{u}_t + a_c \vec{u}_n$$

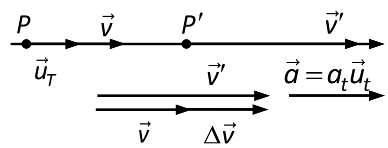
Comparando las dos ecuaciones anteriores concluimos que,

$$\vec{a}_t = a_t \vec{u}_t \quad \text{y} \quad \vec{a}_c = a_c \vec{u}_n$$

donde la primera se denomina ***aceleración tangencial*** y la segunda ***aceleración normal*** o ***centrípeta.*** Reciben el nombre genérico de ***componentes intrínsecas***.

Cada componente tiene un significado bien definido. Para entender esto vamos a considerar dos casos particulares para generalizar después:

a) Movimiento rectilíneo




La figura muestra el vector que representa a la velocidad vectorial de un movimiento rectilíneo en dos posiciones diferentes, correspondientes al intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$. Se ve que $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$ (y por lo tanto[16] $\vec{a}$) tienen siempre la dirección del movimiento; es decir, la dirección tangencial. Así que se cumple que:

1. Sólo hay aceleración tangencial ($a_t$). La centrípeta es nula puesto que dirección de $\vec{a}$ es siempre la de $\vec{u}_t$. Por lo tanto *la aceleración que aparece en las ecuaciones del movimiento rectilíneo y en las leyes horarias del movimiento (que se derivan de aquellas) es siempre la tangencial.*
2. Sólo puede variar la magnitud de la velocidad, ya que un movimiento rectilíneo mantiene la dirección constante.

[15]El sentido del eje puede ser cualquiera. Sin embargo, mientras no se diga lo contrario, lo supondremos orientado en sentido del movimiento positivo.
[16]Recuerda que la aceleración tiene la dirección del cambio del vector velocidad.

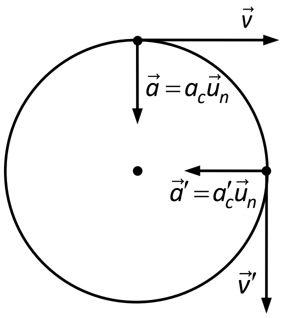
Combinando los puntos 1. y 2. deducimos que,

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt}}$$

que es idéntica a la ecuación que define la aceleración instantánea en movimiento rectilíneo. De nuestro conocimientos de derivadas concluimos que *la aceleración tangencial mide la rapidez instantánea del cambio de la magnitud de la velocidad vectorial;* esto es, *la variación de la magnitud de la velocidad por unidad de tiempo en un instante particular.*

Como ya probamos en el estudio del movimiento rectilíneo, en el caso de que la aceleración tangencial sea constante; o sea, de que el incremento de la velocidad ($\Delta v$) sea directamente proporcional al tiempo, se cumple que,

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta t}{\Delta t} \quad \text{si} \quad a_t = cte$$




b) Movimiento circular uniforme

Un movimiento circular es uniforme cuando la magnitud de la velocidad vectorial permanece constante. En este caso no hay aceleración tangencial, pues la magnitud de la velocidad no cambia. Ya que en el movimiento circular la dirección de la velocidad cambia continuamente, ha de existir aceleración; y puesto que ésta no es tangencial, tiene que ser centrípeta, como se ve en la figura.

Un análisis detallado prueba que en el movimiento circular la aceleración centrípeta es,

$$\boxed{a_c = v^2/R}$$

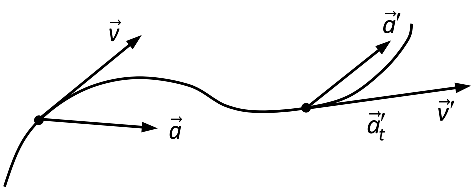
donde $v$ es la velocidad y $R$ el radio de la circunferencia[17].

*La aceleración centrípeta está relacionada con la rapidez con la que cambia la dirección de la velocidad en cada instante y, en el movimiento circular, está dirigida siempre al centro de la circunferencia,* como se aprecia en la figura.

c) Movimiento curvilíneo

En general, en un movimiento con trayectoria curva cambian la dirección y la magnitud de la velocidad; por lo que hay aceleración tangencial y centrípeta. Combinando la ecuación que da $\vec{a}$ en sus componentes con las que expresan $a_t$ y $a_n$, se llega a la ecuación,

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n}$$



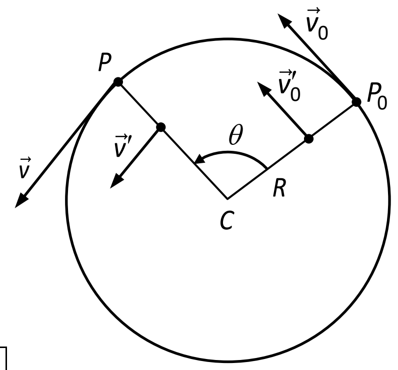

que es la ecuación general de la aceleración. La figura muestra el vector $\vec{a}$ en dos posiciones distintas.

[17]Si la trayectoria no es una circunferencia, *R* representa el radio de curvatura, cuyo valor cambia de un punto a otro de la trayectoria.

## 6. Movimiento circular

Una partícula lleva un ***movimiento circular*** *cuando su trayectoria es una circunferencia.* Se trata de un movimiento muy importante porque en la vida cotidiana es muy habitual.

### *6.1. Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares*



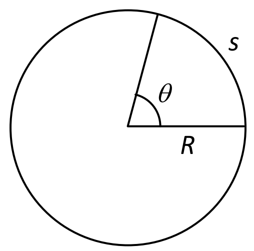

La figura muestra una partícula que describe un movimiento circular de radio *R*. Se ve que todos los puntos del segmento de la recta que une la partícula con el centro de la circunferencia *C* tienen velocidades distintas (recorren distancias diferentes en el mismo tiempo); sin embargo, todos ellos giran el mismo ángulo (esto es, experimentan el mismo ***desplazamiento angular***) en el mismo tiempo. Ésta es la razón por la que está magnitud y las que derivan de ella, llamadas ***magnitudes angulares***[18] son tan importantes en la descripción de este movimiento.

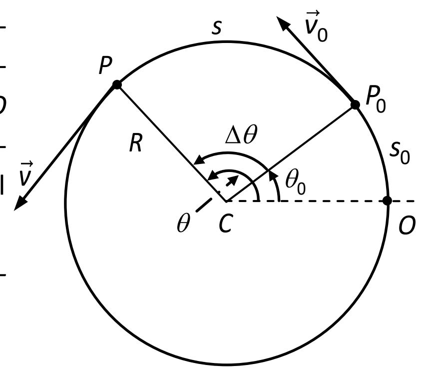
En el movimiento circular interesa introducir dos nuevas magnitudes: una que mida la rapidez de giro de la partícula y otra para medir la rapidez con la que varía la primera. Los ángulos los mediremos siempre en radianes, ya que de este modo se cumple la relación $s = R\theta$, donde $\theta$ es el ángulo subtendido por el arco *s* y *R* el radio de la circunferencia, como se ve en la figura. La ecuación se cumple porque *s*/*R* sólo depende del ángulo subtendido por el arco y no de los valores particulares de *s* y *R*; por lo tanto *s*/*R*, es una medida del ángulo y su unidad se llama ***radián***. El ángulo subtendido por la circunferencia completa es,

$$\theta = 2\pi R / R = 2\pi \; rad$$

como el ángulo que abarca una circunferencia es de 360º,

$$2\pi \; rad = 360º$$




La figura muestra una partícula con un movimiento circular de radio *R*, que se encuentra en el punto $P_0$ en el instante inicial $t_0$ y en el punto *P* en el instante *t*. Elegimos el punto *O* para medir posiciones sobre la circunferencia y la semirrecta *CO* para medir ángulos, y adoptamos el convenio siguiente: las posiciones y los ángulos son positivos si se miden en el sentido opuesto al movimiento de la agujas del reloj.

Se define *la* ***velocidad angular media*** *(*$\omega_m$*) de la partícula en el intervalo de tiempo* $\Delta t$ *como el cociente entre el ángulo girado y el intervalo de tiempo empleado*,

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

por lo que su unidad en el SI es el *rad/s*. De la interpretación del cociente se deduce que la velocidad angular media *es el ángulo medio girado por unidad de tiempo, que es una medida de la rapidez media con la que gira.*

Igual que en el movimiento rectilíneo, la velocidad angular media no informa de la rapidez de giro en un instante particular. Sabemos, por nuestro estudio del movi-

[18]Se llaman así porque derivan de un ángulo. Las magnitudes manejadas hasta ahora (posición, velocidad y aceleración) se llaman ***lineales***. Esto es porque derivan de la distancia entre dos puntos, que se mide con unidades *lineales* de longitud.

miento rectilíneo, que para obtener información de la rapidez de giro en un instante dado *t*, tenemos que calcular el límite del cociente anterior cuando $\Delta t \to 0$ en el instante *t* (es decir, la derivada del ángulo $\theta(t)$ respecto al tiempo).

Se define ***la velocidad angular instantánea*** *($\omega$) de la partícula en un instante particular t como la derivada del ángulo $\theta(t)$ respecto al tiempo en ese instante;* o sea,

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Aplicando el significado físico de la derivada que vimos en el estudio de la velocidad en el movimiento rectilíneo, concluimos que *la velocidad angular de una partícula en un instante particular t es el ángulo que giraría, a partir de t, en una unidad de tiempo, si dicha velocidad angular permaneciera constante; lo que es una medida de la rapidez de giro de la partícula en el instante t.*

Puesto que la velocidad angular puede variar, introduciremos la magnitud *aceleración angular* para medir los cambios. Supongamos que la partícula de la figura anterior lleva una velocidad angular $\omega_0$ en el instante $t_0$ y otra $\omega$ en el instante *t*.

Se define la ***aceleración angular media*** *($\alpha_m$) de la partícula como el cociente entre la variación de la velocidad angular $\Delta\omega$ entre el intervalo de tiempo $\Delta t$ y dicho intervalo;* esto es,

$$\alpha_m = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0}$$

por lo que su unidad en el SI es el *rad/s*$^2$. Del significado de cociente se deduce que la aceleración angular media *es la variación media que experimenta la velocidad angular por unidad de tiempo, que es una medida de la rapidez media con la que cambia.*

Al igual que ocurre con la velocidad angular, la aceleración angular media no informa de la variación de la velocidad angular en un instante particular. Sabemos que para obtener esa información en un instante particular *t*, tenemos que calcular el límite de la aceleración angular media cuando $\Delta t \to 0$ en ese instante (es decir, la derivada del ángulo $\omega(t)$ respecto al tiempo).

Se define ***la aceleración angular instantánea*** *($\alpha$) de la partícula en un instante particular t como la derivada de la velocidad angular $\omega(t)$ respecto al tiempo en ese instante;* es decir,

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Aplicando el significado físico de la derivada, deducimos que, *la aceleración angular de una partícula en un instante particular t es la variación que experimentaría la velocidad angular, a partir de t, en una unidad de tiempo, si la aceleración angular permaneciera constante; que es una medida de la rapidez con la que varía la velocidad angular de la partícula en el instante t.*

### *6.2. Movimientos circular uniforme y uniformemente variado*

El movimiento circular más sencillo es el que mantiene constante la velocidad angular, que recibe el nombre de ***circular uniforme***. Por lo tanto,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = cte$$

Sea una partícula que gira un ángulo $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ en un intervalo de tiempo $\Delta t = t - t_0$ con velocidad angular constante. Sabemos *por nuestros conocimientos de derivadas* que en este caso particular se cumple que,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} = cte$$

y despejando $\theta$ y haciendo $t_0 = 0$ obtenemos,

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega t \text{ ó } \Delta\theta = \omega t}$$

que es la ecuación del movimiento circular uniforme, análoga a la del MRU.

Un movimiento circular que varía su velocidad angular pero que mantiene constante la aceleración angular se llama ***circular uniformemente acelerado***. O sea

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = cte$$

De forma análoga al movimiento circular uniforme, si la partícula varía su velocidad angular en $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ en un intervalo de tiempo $\Delta t = t - t_0$ y la aceleración angular es constante, se tiene que cumplir que,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} = cte$$

y despejando $\theta$ y haciendo $t_0 = 0$ obtenemos,

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t} \quad (4)$$

que es la ecuación de la velocidad angular, análoga a la del movimiento rectilíneo uniformemente variado. Por lo tanto, siguiendo *exactamente los mismo pasos* que los dados en el punto 3.2 (*MRUV*), llegamos a,

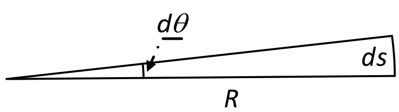
$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + ½\alpha t^2 \Rightarrow \Delta\theta = \theta - \theta_0 = \omega_0 t + ½\alpha t^2} \quad (5)$$

que es la ecuación del movimiento circular uniformemente variado, análoga a la del rectilíneo uniformemente variado.

Si, como hicimos en el punto 3.2, combinamos las ecuaciones (4) y (5) para eliminar el tiempo se llega a,

$$\boxed{\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta}$$

### 6.3. Relaciones entre las magnitudes lineales y las angulares




Sea una partícula con un movimiento circular. En un intervalo de tiempo infinitesimal $dt$ recorre un arco $ds$ (también infinitesimal), como ilustra la figura. Como el ángulo (infinitesimal) *subtendido* por $ds$ es $d\theta$, se cumple que $ds = R\,d\theta$ y puesto que $v = ds/dt$, se tiene, al interpretar la derivada como un cociente, que,

$$v = \frac{ds}{dr} = \frac{R\,d\theta}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

pero $\omega = d\theta/dt$, por lo tanto,

$$\boxed{v = R\omega}$$

que es la relación entre la velocidad lineal y la angular.

Vimos en el punto 5.4 que la relación entre la magnitud de la velocidad vectorial y la aceleración tangencial es $a_t = dv/dt$, donde, interpretando a la derivada como un cociente, *dt* representa un intervalo de tiempo infinitesimal y *dv* la variación (infinitesimal) que experimenta la magnitud de la velocidad en *dt*. Si *v* y *v′* son las velocidades al principio y al final del intervalo, tenemos que,

$$dv = v' - v$$

Ahora bien, el cambio infinitesimal de *v* implica también un cambio (infinitesimal) en $\omega$. Sean $\omega$ y $\omega'$ las velocidades angulares al principio y al final de *dt*, entonces,

$$d\omega = \omega' - \omega$$

donde $d\omega$ es el cambio infinitesimal de $\omega$. Como $v' = R\omega'$ y $v = R\omega$, tenemos, al combinar las cuatro últimas ecuaciones, que,

$$dv = v' - v = R\omega' - R\omega = R(\omega' - \omega) = R\,d\omega$$

y utilizando la ecuación de la aceleración tangencial,

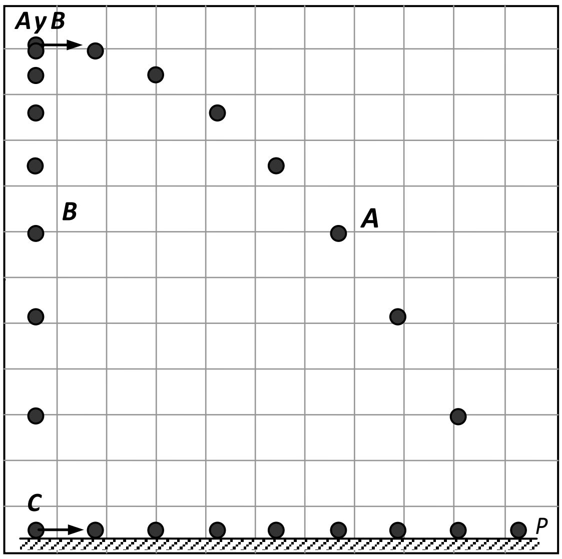
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{R\,d\omega}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$$

pero sabemos que $\alpha = d\omega/dt$; por lo tanto,

$$\boxed{a_t = R\alpha}$$

que es la ecuación que relaciona la aceleración tangencial y la angular.

## 7. Composición de movimientos. Aplicación a casos particulares




La figura muestra tres pequeñas bolas de acero *A*, *B* y *C* colocadas del modo siguiente: *C* está sobre un plano horizontal (que suponemos sin rozamiento) mientras que *A* y *B* se encuentran sobre la vertical de *C* y en la misma posición. En un instante dado se le comunica la misma velocidad horizontal (*v*) a *A* y a *C*, mientras que se deja caer libremente a *B*.

Observa que la bola *A* está sometida simultáneamente a dos movimientos (es decir, lleva un ***movimiento compuesto***): uno horizontal, como consecuencia de la velocidad horizontal y otro vertical, como consecuencia de la aceleración de la gravedad. Los experimentos prueban que las bolas *A* y *C* alcanzan el punto *P* del plano horizontal en el mismo instante.

En la figura, que muestra las posiciones de las bolas a intervalos de tiempo iguales, se ve que el movimiento horizontal de *A* no influye en el vertical, pues las alturas de *A* y *B* son las mismas en todos los instantes. Asimismo se ve que el movimiento vertical de *A* no influye en el horizontal, pues las distancias horizontales recorridas por *A* y *C* son iguales. Esto es, el movimiento horizontal de *A* es uniforme y el vertical es uniformemente variado (aceleración de la gravedad).

El movimiento de la bola *C* es el mismo que el de la proyección horizontal de *A* y el movimiento de *B* es idéntico al de la proyección vertical de *A*. Es decir, las posiciones de *C* y *B* son, respectivamente, las de las proyecciones horizontal y vertical de la bola *A*.

El análisis de muchas experiencias como la anterior permite enunciar el ***principio de independencia de movimientos***, formulado por Galileo en el siglo XVII:

*Si una partícula está sometida, por causas distintas, a movimientos simultáneos, éstos son completamente independientes;* es decir*, el cambio de posición de la partícula es independiente de que los movimientos tengan lugar simultánea o sucesivamente.*

En efecto, a la bola *A* le lleva un tiempo $\Delta t$ llegar al punto *P*. En $\Delta t$ la bola *B* recorre la altura que tiene respecto al plano horizontal y la bola *C*, que lleva velocidad *v*, recorre la distancia horizontal que la separa del punto *P*.

Si en lugar de comunicarle a la bola *A* los movimientos **simultáneamente**, lo hacemos **sucesivamente**:

1º La dejamos caer libremente: llega al plano horizontal en $\Delta t$.

2º Le comunicamos la velocidad horizontal *v*: llega al punto *P* en $\Delta t$.

El cambio de posición de la bola *A* ha sido el mismo al someterla al mismo movimiento simultánea y sucesivamente.

Supongamos una partícula que se mueve en el plano *OXY* con dos movimientos componentes simultáneos, uno en el eje *OX* y otro en el eje *OY*. Sean,

$$\left.\begin{array}{l} x,\, v_x\,,\, a_x \\ y,\, v_y\,,\, a_y \end{array}\right\}$$

respectivamente las posiciones, velocidades y aceleraciones de los movimientos componentes en los ejes *OX* y *OY*. Como estos movimientos son los de las proyecciones de la partícula en dichos ejes, tenemos, al aplicar las ecuaciones del punto 5, que,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}; \quad \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \ \text{ y } \ \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

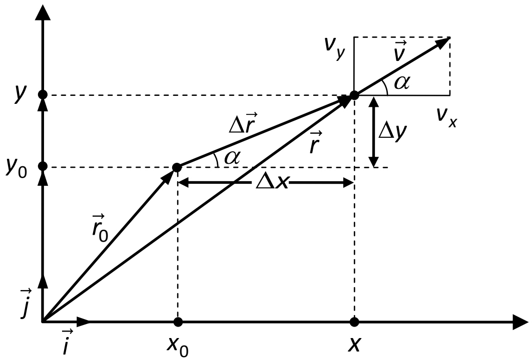
Es decir, se cumple el llamado ***principio de superposición de movimientos*** que afirma que:

*Si una partícula está sometida simultáneamente a movimientos independientes, el movimiento resultante (posición, desplazamiento, velocidad y aceleración) se obtiene al sumar vectorialmente los movimientos componentes.*

El principio de superposición, que es una consecuencia del de independencia, es muy importante porque permite determinar la posición, la trayectoria, la velocidad y la aceleración de cualquier movimiento compuesto, si se conocen las ecuaciones de los movimientos simples que lo componen.

### *7.1. Movimientos rectilíneos uniformes perpendiculares*

Vamos a considerar el caso más simple: la composición de dos movimientos rectilíneos uniformes y perpendiculares, que haremos coincidir con los ejes *OX* y *OY* de




un sistema de coordenadas. Sea una partícula animada simultáneamente con dos MRU[19] de velocidades $v_x$ y $v_y$, de modo que en los instantes $t_0$ = 0 y $t$ sus coordenadas respectivas son ($x_0$, $y_0$) y ($x$, $y$), como se refleja en la figura. Las ecuaciones de los movimientos rectilíneos componentes son,

$$x = x_0 + v_x t \quad \text{y} \quad y = y_0 + v_y t \quad (6)$$

Aplicando el principio de superposición a la posición y velocidad, tenemos que,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{y} \quad \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

De la figura se deduce que la magnitud de la velocidad y su dirección son,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{y} \quad \tan\alpha = v_y / v_x$$

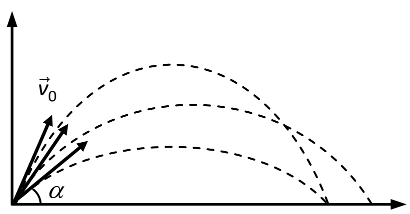
Observa en la figura que la dirección del movimiento es la de la velocidad.

Para obtener la ecuación de la trayectoria eliminamos el tiempo de las ec. (6),

$$\left.\begin{array}{r} x = x_0 + v_x t \;\Rightarrow\; t = (x - x_0)/v_x \\ y = y_0 + v_y t \end{array}\right\} \Rightarrow\; y = y_0 + v_y\left(\frac{x - x_0}{v_x}\right) \;\Rightarrow\; y - y_0 = \frac{v_y}{v_x}(x - x_0)$$

que es la ecuación de una recta de pendiente $v_y / v_x$. Por lo tanto, el movimiento resultante de dos MRU es otro MRU.

### 7.2. Movimiento parabólico




El lanzamiento de un objeto animado con una velocidad inicial $v_0$ cuya dirección forma un ángulo $\alpha$ con la horizontal origina un movimiento de trayectoria parabólica[20], como se ve en la figura, que se llama **movimiento parabólico**. Para un mismo valor de la velocidad, si se varía el ángulo de lanzamiento $\alpha$, se obtiene una familia de parábolas. Los casos extremos son:

- $\alpha = 0$, se trata de un lanzamiento horizontal.
- $\alpha = 90$, es un lanzamiento vertical.

Como ya se ha visto, el movimiento parabólico es la composición de dos movimientos rectilíneos: uno horizontal uniforme y otro vertical uniformemente variado cuya aceleración es la de la gravedad ($g$).

Sea una partícula con un movimiento parabólico cuya velocidad inicial $\vec{v}_0$ forma un ángulo con la horizontal $\alpha$, como se ve en la figura. Se ha elegido el sistema de coordenadas de modo que el MRU tenga lugar en el eje $OX$ y el MRUV[21] en el eje $OY$. En los instantes $t_0$ = 0 y $t$ sus coordenadas respectivas son ($x_0$, $y_0$) y ($x$, $y$).

Aplicando el principio de superposición a la posición, velocidad y aceleración deducimos que,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}; \quad \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \quad \text{y} \quad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

De la figura se deduce que las componentes de la velocidad inicial son,

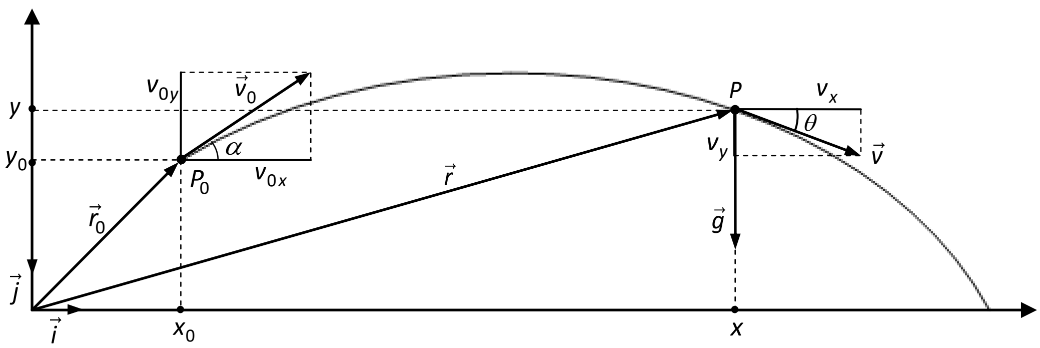
---

[19] Movimiento rectilíneo uniforme.

[20] En realidad la trayectoria no es parabólica debido a la fricción del objeto con el aire; además la rotación de la Tierra hace que el movimiento no se dé exactamente en un plano vertical.

[21] Movimiento rectilíneo uniformemente variado.

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \quad \text{y} \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$




Así pues, las velocidades de los movimientos rectilíneos componentes son,

$$\text{MRU } (OX): \quad v_x = v_{0x} = cte$$

$$\text{MRUV } (OY): \quad v_y = v_{0y} - gt$$

cuya suma vectorial, de acuerdo con el principio de superposición, da la velocidad vectorial del movimiento parabólico.

La magnitud y la dirección de $\vec{v}$ son (ver figura),

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{y} \quad \tan\alpha = v_y / v_x$$

Y sus aceleraciones,

$$\text{MRU } (OX): \quad a_x = 0 \ \text{(movimiento uniforme)}$$

$$\text{MRUV } (OY): \quad a_y = -g \ \text{(es la aceleración de la gravedad)}$$

Finalmente, las ecuaciones de los movimientos rectilíneos son,

$$\text{MRU } (OX): \quad x = x_0 + v_x t$$

$$\text{MRUV } (OY): \quad y = y_0 + v_{0y} t - ½ g t^2$$

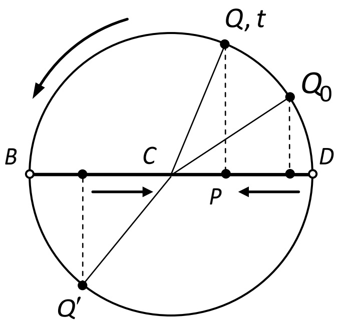
Con estas ecuaciones, conociendo la posición inicial del objeto, la magnitud de la velocidad inicial y $\alpha$ (***ángulo de tiro o elevación***), podemos determinar cuánto se nos pida: altura máxima alcanzada, alcance máximo, tiempo de vuelo (tiempo que está en el aire) y posición y velocidad en cualquier instante. También se puede obtener la ecuación de la trayectoria sin más que eliminar el tiempo entre las ecuaciones que expresan la posición en función del tiempo en los ejes coordenados.

## 8. Movimiento armónico simple (MAS)

Una partícula tiene un movimiento ***oscilatorio*** o ***vibratorio*** *cuando se mueve periódicamente alrededor de una posición de equilibrio*[22], que recibe el nombre de ***centro de oscilación***.

El movimiento de un péndulo y el de una masa sometida a la fuerza de un muelle estirado son ejemplos de movimientos oscilatorios. Los átomos en un sólido y en una molécula vibran unos respecto a otros y los electrones en una antena emisora

[22]Recibe este nombre porque la fuerza que actúa sobre la partícula tiende a llevarla siempre a esta posición.




o receptora oscilan rápidamente. Entender el movimiento vibratorio es esencial para el estudio de los fenómenos ondulatorios relacionados con el sonido y la luz.

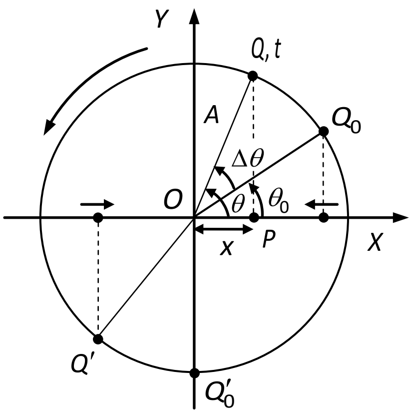
De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el ***movimiento armónico simple*** (**MAS**). Además de ser el más sencillo de analizar, constituye una descripción bastante precisa de muchas oscilaciones que se observan en la Naturaleza. Sin embargo, *no todos los movimientos oscilatorios son armónicos*.

Sea una partícula que describe un *movimiento circular uniforme* en el sentido opuesto al de las agujas del reloj, como indica la figura. Supongamos que se encuentra en el punto $Q_0$ en el instante inicial ($t_0 = 0$), en el punto $Q$ en el instante $t$ y en el punto $Q'$ en el instante $t'$.

La proyección de la partícula sobre el diámetro *BD* es el punto *P*. En la figura se ve que, conforme la partícula se mueve por la circunferencia, la proyección *P* ejecuta un movimiento de oscilación alrededor de *C* entre los puntos *B* y *D*.

*La proyección de un movimiento circular uniforme sobre un diámetro de la circunferencia ejecuta un movimiento de oscilación respecto al centro de la misma, que recibe el nombre de **movimiento armónico simple**, abreviadamente **MAS**.*

## 8.1. Ecuación del movimiento armónico simple




Consideremos un sistema de coordenadas tal que su eje *OX* tenga la dirección del diámetro *BD* y su origen (*O*) coincida con el centro de la circunferencia (*C*), como se ve en la figura. En el instante *t*, cuando la partícula está en el punto *Q*, el ángulo que el radio $A = OQ$ forma con *OX* es $\theta$, por lo que la distancia $x = OP$ (con signo positivo o negativo, según a qué lado de *O* se encuentre el punto *P*), que da la posición de *P* respecto a *O*, es igual a,

$$x = A\cos\theta$$

El desplazamiento angular de la partícula en el intervalo $\Delta t = t - t_0 = t$ (pues $t_0 = 0$) es $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, por lo que, si su velocidad angular es $\omega$, al aplicar la ecuación del movimiento circular uniforme, tenemos,

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = \omega t \;\Rightarrow\; \theta = \theta_0 + \omega t$$

que sustituyendo en la ecuación anterior da,

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \theta_0)}$$

que *es la ecuación del MAS expresada en función del coseno*. Recordando que $\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$, se puede expresar como,

$$x = A\sin(\omega t + \theta_0 + \pi/2)$$

y haciendo $\varphi = \theta_0 + \pi/2$, queda finalmente que,

$$\boxed{x = A\sin(\omega t + \varphi)}$$ [23]

que *es la ecuación del MAS expresada en función del seno*. Es la forma más habi-

[23] Notemos que la cantidad *OP* expresa **siempre** el desplazamiento de *P* respecto al centro de oscilación *C* y también su posición respecto a *O* si *C* y *O* coinciden. En el caso de que el origen de coordenadas *O* no coincida con *C*, $x \neq OP$ y, por lo tanto, *x* ya no da la posición de *P* respecto a *O*. En este caso la ecuación se escribe como $\Delta x = A\sin(\omega t + \varphi)$, con $\Delta x = x - x_0 = OP$ y donde $x_0$ representa la posición de *C* respecto a *O*.

tual de encontrarla

La cantidad *x*, que expresa el desplazamiento de *P* respecto a *O*, se denomina ***elongación***. A ($\omega t$ + $\varphi$) se le conoce como ***ángulo de fase*** o simplemente ***fase*** y $\varphi$ es la ***fase inicial***; es decir, la fase en el instante $t = t_0 = 0$ que, como veremos más adelante, determina la posición de la partícula en el instante $t_0$. Ya que la función *seno* oscila entre –1 y +1, el desplazamiento de la partícula varía desde *x* = –*A* hasta *x* = *A*. La separación máxima de la partícula a partir del origen (*A*) es la ***amplitud*** del movimiento y $\omega$ es una constante característica de cada MAS denominada ***pulsación*** o ***frecuencia angular***.

Si empezamos a contar el tiempo cuando la partícula con movimiento circular se encuentra en el punto $Q_0'$; o sea, cuando el punto *P* que describe el MAS está en el origen *O* y moviéndose en el sentido positivo del eje *OX* (ver figura),

$$\theta_0 = 3\pi/2 \Rightarrow x = A\cos(\omega t + 3\pi/2)$$

pero recordando que $\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$, queda que,

$$x = A\sin\left[(\omega t + 3\pi/2) + \pi/2\right] = A\sin(\omega t + 2\pi) \Rightarrow$$

$$\boxed{x = A\sin\omega t}$$

que *es* la *ecuación del MAS de una partícula que, cuando empezamos a contar el tiempo, se encuentra en el punto x = 0 y moviéndose en el sentido positivo del eje*.

## 8.2. Ecuaciones de la velocidad y la aceleración

La velocidad (*v*) del punto *P*, que describe un MAS a largo del eje *OX*, es la derivada de la posición respecto al tiempo. Como el desplazamiento (o sea, la elongación) coincide con la posición cuando el centro de oscilación se sitúa en el origen de coordenadas tenemos que,

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\sin(\omega t + \varphi)\right] \Rightarrow \boxed{v = \omega A\cos(\omega t + \varphi)}$$

que *varía periódicamente entre los valores* $-\omega A$ (mínimo) y $+\omega A$ (máximo). Usando la relación,

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}$$

podemos expresar la velocidad en función de la posición (*x*). En efecto,

$$v = \omega A\sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \varphi)} = \omega\sqrt{A^2 - A^2\sin^2(\omega t + \varphi)}$$

y teniendo en cuenta que $x = A\sin\omega t$, queda que,

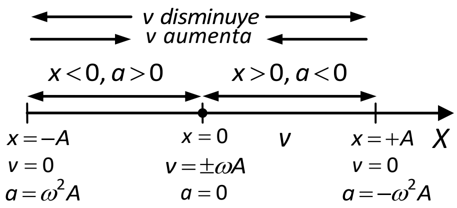
$$\boxed{v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}}$$

Análogamente, la aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo; por lo tanto,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\omega A\cos(\omega t + \varphi)\right] \Rightarrow \boxed{a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi)}$$

Si usamos que $x = A\sin\omega t$, podemos expresar la aceleración en función de la posición (*x*),

$$\boxed{a=-\omega^2 x}$$




que *varía periódicamente entre los valores* $-\omega^2 A$ (mínimo) y $+\omega^2 A$ (máximo). Observa que la ecuación expresa que *en el MAS la aceleración es proporcional y de sentido opuesto a la elongación. Esto es, cuando la aceleración es positiva la elongación es negativa y viceversa.*

La figura muestra los valores de *x*, *v* y *a* en los puntos más importantes, así como sus signos.

## 8.3. Periodicidad del movimiento

Un movimiento es ***periódico*** cuando repite simultáneamente su posición, velocidad y aceleración cada cierto intervalo de tiempo denominado ***periodo*** *(T)*.

Las funciones *seno* y *coseno* son periódicas puesto que se repiten cada vez que el ángulo varía en $2\pi$ radianes; esto es así porque,

$$\sin\alpha=\sin(\alpha+2n\pi) \ \text{ y } \ \cos\alpha=\cos(\alpha+2n\pi) \ \text{ con } n\in\mathbb{Z}$$

Las ecuaciones de la elongación y la aceleración son funciones de $\sin\omega t$ y la ecuación de la velocidad es función de $\cos\omega t$; por lo tanto, *las tres* se repiten cada vez que $\omega t$ se incrementa en $2\pi$ radianes, lo que significa que *el MAS es un movimiento periódico*

Puesto que el término $\omega$ de la ecuación del MAS es constante, el periodo del movimiento ($T$) tiene que cumplir que,

$$2\pi=\omega T \Rightarrow T=2\pi/\omega$$

Recuerda que, la frecuencia ($f$) de un movimiento periódico es el número de oscilaciones completas por unidad de tiempo, o sea,

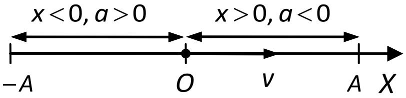
$$f=1/T$$

y se mide en el SI en ciclos/segundo, unidad que recibe el nombre de ***Hertzio*** *(Hz)*. De las ecuaciones anteriores se deduce que la relación entre la frecuencia angular y la frecuencia es,

$$\boxed{\omega=2\pi f}$$

## 8.4. Representaciones gráficas

Las representaciones gráficas de la elongación, velocidad y aceleración que vamos a ver a continuación muestran el carácter periódico del MAS.

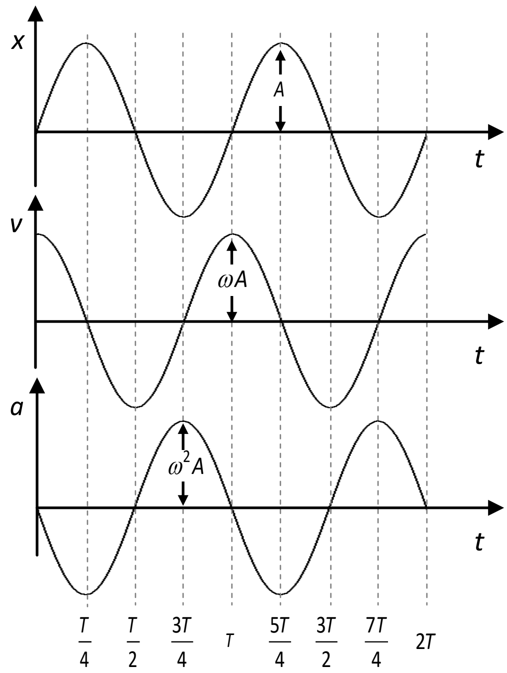



Sea una partícula animada con un MAS a lo largo del eje *OX* de un sistema de coordenadas, oscilando entre los puntos $x=-A$ y $x=A$. Supongamos que al empezar a contar el tiempo ($t_0$ = 0) está en la posición $x_0$ = 0 y moviéndose hacia la derecha ($v$ > 0) como ilustra la figura. Hemos visto en el punto 8.1 que en este caso particular la fase inicial es cero, por lo que la ecuación es,

$$x=A\sin\omega t$$

del mismo modo, las ecuaciones de la velocidad y aceleración toman la forma,

$$v=\omega A\cos\omega t \ \text{ y } \ a=-\omega^2 A\sin\omega t=-\omega^2 x$$




En la figura se han representado la elongación, la velocidad y la aceleración en función del tiempo en el caso particular que estamos considerando y se han indicado los valores de las magnitudes a intervalos de tiempo de un cuarto de periodo. Se ve cómo los valores de las magnitudes se repiten cuando transcurre un periodo.

Las gráficas *x* y *a* reflejan que estas magnitudes alcanzan sus valores nulos al mismo tiempo y que en los instantes en los que *x* es máxima, *a* es mínima y viceversa; se dice que se encuentran en ***oposición de fase***. El nombre se debe a que si comparamos las ecuaciones de *x* y *a*, tenemos que,

$$x = A\sin\omega t$$

$$\left.\begin{array}{r} a = -\omega^2 A\sin\omega t \\ -\sin\omega t = \sin(\omega t + \pi) \end{array}\right\} \Rightarrow a = \omega^2 A\sin(\omega t + \pi)$$

esto es, que *la diferencia de sus ángulos de fase es de $\pi$ radianes*.

Las gráficas de *x* y *v* indican que cuando una de ellas es máxima o mínima, la otra es nula y viceversa. Comparando sus ecuaciones,

$$x = A\sin\omega t$$

$$\left.\begin{array}{r} v = \omega A\cos\omega t \\ \cos\omega t = \sin(\omega t + \pi/2) \end{array}\right\} \Rightarrow v = \omega A\sin(\omega t + \pi/2)$$

vemos que la diferencia de fase entre ambas es de $\pi/2$ radianes. Como el término $\pi/2$ aparece con signo positivo, se dice que *v* está *adelantada* $\pi/2$ rad respecto a *x*. Por la misma razón, decimos que *a* adelanta a *x* en $\pi$ radianes.