

FÍSICA 2º DE BACHILLERATO

TEMA 2: INTERACCIÓN GRAVITATORIA

1. La Astronomía: evolución histórica desde la antigüedad hasta Kepler.
2. Leyes de Kepler.
3. Ley de la Gravitación Universal. Consecuencias.
 - 3.1. Ley de la Gravitación Universal.
 - 3.2. Consecuencias.
 - 3.2.1. La fuerza gravitatoria es central.
 - 3.2.2. El momento angular de los planetas es constante.
 - 3.2.3. Demostración de la tercera ley en el caso particular de órbitas circulares.
 - 3.2.4. Cálculo de la aceleración de la gravedad.
4. Concepto de campo. Campo conservativo.
 - 4.1. Concepto de campo. Campos escalares y vectoriales.
 - 4.2. Campo de fuerza. Campo conservativo y campo escalar asociado.
 - 4.3. Representación gráfica de los campos.
5. Campo gravitatorio creado por una o varias partículas. Líneas de fuerza.
 - 5.1. Concepto de campo gravitatorio. Principio de superposición.
 - 5.2. Representación gráfica del campo gravitatorio.
6. Energía potencial gravitatoria. Potencial gravitatorio.
 - 6.1. Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria: Energía potencial.
 - 6.2. Elección del origen de energía potencial.
 - 6.3. Potencial gravitatorio. Su relación con el trabajo.
 - 6.4. Superficies equipotenciales.
7. Campo gravitatorio terrestre. Energía potencial en las proximidades de la superficie terrestre.
 - 7.1. Definición del campo gravitatorio terrestre. Su valor en la S.T. Variación del campo con la altura.
 - 7.2. Intensidad del campo y aceleración de la gravedad en la S.T.
 - 7.3. Energía potencial en las proximidades de la S.T.
8. Estudio del movimiento de planetas y satélites. Velocidad de escape.
 - 8.1. Velocidad en una órbita circular.
 - 8.2. Energía mecánica en una órbita circular.
 - 8.3. Tipos de órbitas según el valor de la energía.
 - 8.4. Velocidad de escape
9. El problema de los tres cuerpos: caos determinista.
10. Satélites artificiales.
11. Materia oscura y energía oscura.

1. La Astronomía: evolución histórica desde la antigüedad hasta Kepler

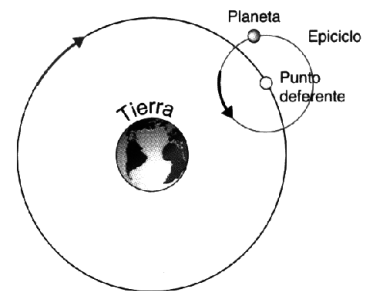
Buscar una explicación razonable al movimiento aparentemente irregular de los planetas fue objeto de graves preocupaciones de los astrónomos desde la Antigüedad. De todas las explicaciones y teorías que se han dado a lo largo de los siglos para justificar el movimiento “errático” de estos cuerpos celestes, solamente citaremos las más interesantes, desde Aristóteles hasta Newton.

Aristóteles (siglo IV a.C.) creía que los cuerpos son atraídos por la Tierra porque ésta es el Centro del Universo, hacia el cual tiende la materia de una manera natural. Por ello, para Aristóteles, la caída de los cuerpos es un movimiento natural. Pensaba, sin embargo, que la materia celeste tiene la propiedad de suministrar por sí misma la fuerza necesaria para mantener sus movimientos y que el movimiento de los planetas, además de natural, es perfecto porque todos ellos describen una trayectoria perfecta: la circunferencia.

Para Aristóteles el Universo está formado por dos mundos distintos: el *celeste* y el *terrestre*, de modo que los movimientos que se dan en la Tierra (*terrestres*) y los que tienen lugar en el resto del Universo (*celestes*) son totalmente independientes. Esto es, están regidos por leyes distintas.

Aristarco de Samos (310-230 a. C.) mantenía la idea de un Universo en el que el centro del sistema planetario es el Sol y que en torno a él giran la Tierra y los demás planetas, excepto la Luna que gira en torno a la Tierra. Es decir, defendió el modelo *heliocéntrico*. Sin embargo, esta idea era prematura para su cultura y no cuajó.

Ptolomeo de Alejandría (100-170 d. C.) defendió la idea Aristotélica de que la Tierra es el centro del Universo. Para él, todos los demás planetas, incluido el Sol, giran alrededor de ella. Esta teoría *geocéntrica* la expuso Ptolomeo en su gran obra titulada *Almagesto*, que constituye una enciclopedia de Astronomía, y subsistió como el tratado clásico de esta ciencia hasta los días de Copérnico. El modelo de Ptolomeo es coherente con las ideas filosóficas de su tiempo; sin embargo, para poder explicar el desplazamiento observado en los planetas tiene que recurrir a una complicada combinación de movimientos circulares. Los planetas, según Ptolomeo, describen *epiciclos*; es decir, trayectorias circulares cuyo centro se desplaza sobre otra trayectoria también circular alrededor de la Tierra denominada *deferente*, como muestra la figura.



En 1530 Copérnico (1473-1543) concibió el modelo heliocéntrico. Según esta teoría, el Sol es el que está inmóvil y todos los demás planetas, incluida la Tierra, giran alrededor de él. Copérnico basó su teoría en dos hipótesis:

- La revolución diaria de la Tierra alrededor de su eje.
- El movimiento anual de la Tierra alrededor del Sol.

Las ideas de Copérnico recibieron una fuerte oposición tanto de carácter científico como eclesiástico.

Hacia el año 1530 acabó Copérnico un tratado explicando su modelo astronómico y más adelante, en el mismo año, publicó un resumen en forma popular. El primer ejemplar impreso de su obra completa le alcanzó en el lecho de muerte en 1543. La teoría de Copérnico fue denunciada como “falsa y opuesta a las Sagradas Escri-

turas”, hasta tal punto que Martín Lutero le acusó de loco y hereje.

Las ideas de Copérnico se abrieron paso poco a poco, hasta que Galileo (1564-1642) enfocó el cielo con un telescopio¹ construido por él mismo en 1609 y descubrió los satélites de Júpiter, que forman un sistema solar en miniatura. Desde entonces, Galileo fue el principal defensor de la teoría heliocéntrica. Sin embargo, la controversia sobre si la Tierra se mueve duró más de cien años, hasta que las ideas de Copérnico fueron aceptadas de modo general. El sistema de Copérnico produjo una revolución, tanto en la Astronomía como en el pensamiento científico.

El modelo heliocéntrico de Copérnico, aunque mucho más aproximado a la realidad, es claramente incorrecto. En efecto, utiliza la misma “mecánica” que el sistema geocéntrico; es decir:

- a) Exige a los cuerpos celestes un movimiento circular uniforme.
- b) La gravedad la considera como una tendencia de los cuerpos a dirigirse al centro de la Tierra.
- c) Supone que las estrellas se sitúan en la superficie de una esfera, con centro en el Sol, más allá de la órbita de Saturno y que están en reposo respecto al Sol (*esfera de las estrellas fijas*).

El primer astrónomo moderno que registró detalles precisos acerca de los movimientos planetarios fue Tycho Brahe (1546-1601), de Copenhague, quien realizó mediciones astronómicas exactas durante un periodo de 20 años y proporcionó la base del modelo del sistema solar aceptado en la actualidad. Brahe no quiso aceptar el sistema de Copérnico, a pesar de su simplicidad, y trató de perfeccionar el sistema geocéntrico situando a la Tierra en el centro del Universo, al Sol orbitando alrededor de la Tierra y a los demás planetas girando alrededor del Sol. En los últimos años de su vida fue auxiliado por J. Kepler (1571-1630), a quien legó su colección única de datos. Éste analizó e interpretó los datos de Brahe y encontró importantes regularidades en el movimiento de los planetas, lo que le condujo a desarrollar tres leyes que rigen el movimiento de los mismos.

Las leyes de Kepler mostraron la sencillez con que pueden describirse los movimientos planetarios al considerar al Sol como cuerpo central, si se abandona la noción de círculos perfectos en que se basan tanto el sistema de Ptolomeo como el de Copérnico. Sin embargo, las leyes de Kepler son empíricas; simplemente describen el movimiento de los planetas sin ninguna base en términos de fuerzas. Por lo tanto, constituyó un enorme triunfo que Newton fuera capaz más tarde de derivar las leyes de Kepler a partir de sus leyes del movimiento y de la gravitación, la cual especifica la fuerza que actúa entre cada planeta y el Sol. Newton explicó el movimiento de los planetas y el de los cuerpos que caen en la superficie de la Tierra con un concepto común: la fuerza gravitatoria; es decir, unificó en una sola teoría las mecánicas celeste y la terrestre, que hasta entonces habían estado separadas.

¹Aunque se atribuye el invento del telescopio a Hans Lippershey, un fabricante de lentes alemán; recientes investigaciones publicadas por la revista británica *History Today*, atribuyen la autoría a un gerundense llamado Juan Roget en 1590. Al parecer, Lippershey lo patentó y lo puso a disposición de su uso general en 1608.

2. Leyes de Kepler

En el año 1609 J. Kepler enunció sus tres leyes empíricas que rigen el movimiento de los planetas. Son éstas:

1. Ley de las órbitas

Los planetas giran alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas planas en uno de cuyos focos está el Sol (figura superior).

2. Ley de las áreas

En el movimiento de los planetas, el radio vector que une el centro del Sol y el del planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (figura inferior).

Si las áreas A y A' barridas por el planeta son iguales, entonces los tiempos empleados por el planeta para completarlas también son iguales.

3. Ley de los periodos

Los cubos de los semiejes mayores de las elipses que describen los planetas (o lo que es equivalente, las distancias medias de los planetas al Sol) en sus movimientos son directamente proporcionales al cuadrado de los periodos de revolución alrededor del Sol.

Si R_1 y R_2 son los semiejes mayores de las órbitas de dos planetas y T_1 y T_2 los respectivos periodos de revolución, la 3ª ley, expresada matemáticamente, establece que,

$$\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} = k$$

que también puede expresarse como $R^3 = kT^2$, donde R es el radio del semieje mayor, T el periodo y k una constante de proporcionalidad.

Las dos primeras leyes rompen con uno de los más importantes axiomas de la ciencia antigua, según el cual el movimiento perfecto es el circular uniforme y, por lo tanto, éste tiene que ser el que describen los planetas.

Se define la **velocidad areolar** (V_{ar}) de un planeta como el área barrida por el radio vector que une el centro del Sol con el del planeta por unidad de tiempo (ver figura); lo que no es más que una medida de la rapidez con la que el citado radio vector barre el área.

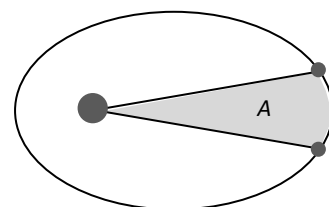
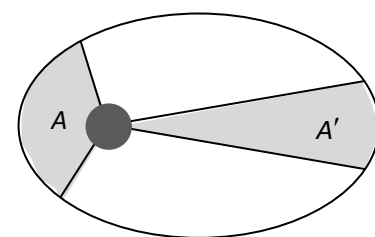
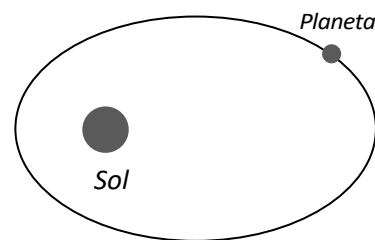
Sabemos que la derivada de una magnitud respecto al tiempo mide la rapidez con la que varía dicha magnitud. Por lo tanto, la velocidad areolar de un planeta se obtiene derivando el área barrida respecto al tiempo; esto es,

$$V_{ar} = dA/dt$$

De nuestros conocimientos de derivadas, sabemos que en el caso particular de que $V_{ar} = cte$ durante un intervalo de tiempo Δt en el que el área barrida por el radio vector es ΔA , se cumple que,

$$V_{ar} = \frac{dA}{dt} = \frac{\Delta A}{\Delta t} = cte$$

Haciendo uso del concepto de velocidad areolar, la 2ª ley se puede expresar también así: *la velocidad areolar de los planetas en su movimiento alrededor del Sol es constante.*



La 1ª ley establece que el movimiento es elíptico y no circular; y de la 2ª ley se deduce que no es uniforme ya que, si las áreas barridas por los radios vectores en tiempos iguales han de ser iguales, el arco de elipse que recorre un planeta en un determinado tiempo es mayor cuanto menor es la distancia del planeta al Sol, como muestra la figura inferior.

Es importante recordar que estas leyes se refieren a la cinemática de los astros, es decir, a sus movimientos, sin entrar en las causas que los originan.

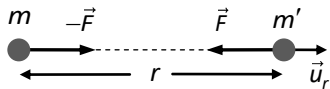
3. Ley de la Gravitación Universal. Consecuencias

3.1. Ley de Gravitación Universal

Newton, conocedor de los experimentos de Galileo en los que se prueba que todos los cuerpos son atraídos por Tierra con la misma aceleración, intuyó que la fuerza responsable de la caída de los cuerpos y la que sostiene a la Luna en su órbita es la misma. A partir de este hecho, el cálculo de la aceleración de la Luna en su órbita, la aceleración que la Tierra comunica a los objetos situados en su superficie y la tercera ley de Kepler le llevaron a establecer la ley de la **Gravitación Universal**, formulada en 1666 y publicada en 1687, que se puede enunciar así:

Dos partículas de masas m y m' situadas a una distancia r se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

La expresión matemática de la ley es (ver figura),



$$F = G \frac{mm'}{r^2}$$

donde G es la constante de proporcionalidad, denominada constante de **gravitación universal**.

Si tenemos en cuenta que la fuerza es una magnitud vectorial que tiene la dirección de la línea recta que une las partículas, podemos expresar vectorialmente la ley, para la fuerza que m ejerce sobre m' , como,

$$\vec{F} = -G \frac{mm'}{r^2} \vec{u}_r$$

donde $\vec{u}_r$ es un vector unitario que tiene la dirección de la recta que une las partículas y el sentido de m a m' . El signo $(-)$ se debe a que $\vec{F}$ y $\vec{u}_r$ tienen sentidos opuestos. De acuerdo con la ley de acción y reacción, la fuerza que ejerce m' sobre m es igual y opuesta a la que m ejerce sobre m' .

La constante G fue calculada experimentalmente en el laboratorio 132 años más tarde por Cavendish, en 1798, utilizando un artificio denominado *balanza de torsión*. El valor hallado fue,

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

para entender su significado basta considerar dos masas de 1 kg situadas a 1 m de distancia; entonces,

$$F = G \frac{1\text{ kg} \cdot 1\text{ kg}}{1^2 \text{ m}^2} = G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

de donde se deduce que G expresa la fuerza con que se atraen dos masas de 1 kg situadas a 1 m de distancia.

Nota que la ley de gravitación expresa la fuerza entre partículas. Si queremos determinar la fuerza entre cuerpos extensos, debemos “dividir” a los cuerpos en trocitos muy pequeños y considerar a cada uno como una partícula. A continuación hay que calcular la interacción entre todos los trocitos usando la técnica del cálculo integral.

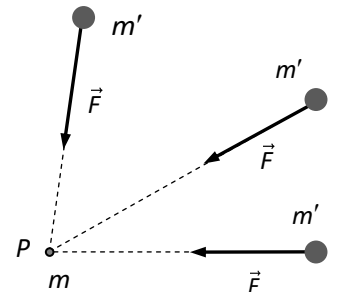
Por lo general es erróneo suponer, en lo que se refiere a los aspectos gravitacionales, que toda la masa de un cuerpo está concentrada en su centro de masas. Sin embargo, esta suposición es correcta para esferas en las que la masa está distribuida de forma homogénea; esto es, podemos considerar a una esfera homogénea como una partícula de la misma masa colocada en su centro geométrico. El punto de un cuerpo arbitrario donde puede considerarse localizada la masa del mismo, en lo que a gravitación se refiere, se llama **centro de gravedad**.

3.2. Consecuencias

De todas las consecuencias que se derivan de la ley de Gravitación Universal, vamos a deducir cuatro: 1) La fuerza gravitatoria es central, 2) El momento angular de los planetas es constante, 3) La tercera ley de Kepler en el caso particular de órbitas circulares y 4) La aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra.

3.2.1. La fuerza gravitatoria es central

Observa en la figura que si mantenemos una masa puntual m fija en un punto P y colocamos otra m' en distintos lugares, la recta que contiene a la fuerza $\vec{F}$ que m ejerce sobre m' pasa siempre por el punto P . Por lo tanto, **la fuerza gravitatoria es central**.



3.2.2. El momento angular de los planetas es constante

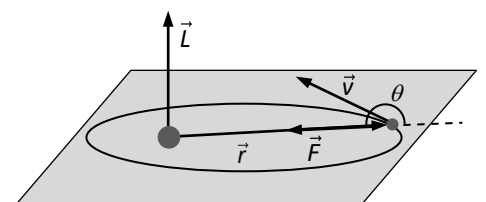
En la figura se ve que la fuerza gravitatoria que el Sol ejerce sobre los planetas, al ser central, apunta siempre al centro del Sol, por lo que el ángulo formado por la fuerza y el vector de posición es $\theta = 180^\circ$. Entonces el momento de la fuerza respecto al centro del Sol es,

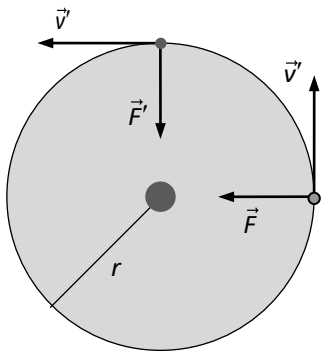
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow M = rF \sin 180 = 0 \quad (\text{pues } \sin 180 = 0)$$

Ahora bien, si calculamos el momento angular del planeta respecto al centro del Sol, tenemos, de acuerdo con el tema Introducción a la Física, que,

$$\vec{M} = d\vec{L}/dt$$

pero $\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$, ya que sólo la derivada de una constante puede ser cero. Por lo tanto, **el momento angular de los planetas respecto al centro del Sol permanece constante**, lo que significa que las órbitas de los planetas son planas y la velocidad areolar constante.





3.2.3. Demostración de la tercera ley en el caso particular de órbitas circulares²

En una órbita circular los focos de la elipse coinciden en el mismo punto: el centro de la circunferencia, que es donde se encuentra el Sol. En este caso particular la fuerza gravitatoria que se ejerce sobre un planeta de masa m (que está dirigida hacia el centro del Sol) es *siempre* perpendicular a su velocidad, como ilustra la figura. Sabemos, por nuestros conocimientos de Dinámica, que la fuerza neta aplicada en la dirección perpendicular al movimiento es la fuerza centrípeta (F_c); por lo tanto en este caso particular, *la fuerza gravitatoria (F_g) es la fuerza centrípeta que mantiene al planeta en su órbita*; es decir,

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_g = \vec{F}_c \\ \vec{F}_c = m\vec{a}_c \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{F}_g = m\vec{a}_c \Rightarrow F_g = ma_c \text{ (en magnitud)}$$

donde a_c es la aceleración centrípeta. Ahora bien, en el caso particular de un movimiento circular la aceleración centrípeta es,

$$a_c = v^2/r$$

donde v es la magnitud de la velocidad y r el radio de la circunferencia. Como,

$$F_g = GMm/r^2$$

donde r es el radio de la órbita y M la masa del Sol, al combinar las ecuaciones tenemos que,

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1)$$

Como sabemos por nuestros conocimientos de Mecánica, la fuerza centrípeta no modifica la magnitud de la velocidad (sólo su dirección), por lo que el movimiento del planeta es circular uniforme; así que,

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} \quad (2)$$

donde T es el periodo del movimiento (tiempo que tarda el planeta en completar su órbita) y $2\pi r$ la distancia recorrida en el tiempo T . Si incluimos la ecuación (2) en la (1) y eliminamos m , llegamos a,

$$\frac{4\pi^2 r^2 / T^2}{r} = G \frac{M}{r^2}$$

que reordenando da,

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = K \text{ (constante)}$$

que es la ley de los periodos para una órbita circular.

3.2.4. Cálculo de la aceleración de la gravedad (g) en la Superficie Terrestre

Consideremos un cuerpo de masa m próximo a la superficie terrestre. Como la Tierra se puede considerar como una partícula situada en su centro, la fuerza que ejerce sobre el cuerpo, aproximándolo a una partícula; es decir, su peso es,

²En una primera aproximación las órbitas de los planetas, exceptuando la de Mercurio, se pueden considerar circulares.

$$F = P = G \frac{M_T m}{R_T^2}$$

donde M_T es la masa de la Tierra y R_T su radio, que coincide con la distancia entre el centro de la Tierra y el cuerpo (porque el tamaño de éste es despreciable frente al radio terrestre). Por otro lado, de acuerdo con las leyes del movimiento del propio Newton $P = mg$, donde g es la aceleración de la gravedad; por lo tanto,

$$mg = G \frac{M_T m}{R_T^2}$$

de donde se deduce que,

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,375 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 9,81 \text{ m/s}^2$$

que es el valor medio de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra.

4. Concepto de campo. Campo conservativo

4.1. Concepto de campo. Campos escalares y vectoriales

Se dice que en una región del espacio existe un **campo físico** si en cada punto de la región está definida una magnitud física, de forma que su valor depende de la posición del punto y, a veces, del tiempo. Un campo que no depende del tiempo se denomina **estacionario**.

Un campo es **vectorial** cuando la magnitud física definida en cada punto es vectorial. El flujo de agua en un río es un ejemplo de campo vectorial, pues a cada punto del mismo se le puede asociar la velocidad vectorial del agua en ese punto.

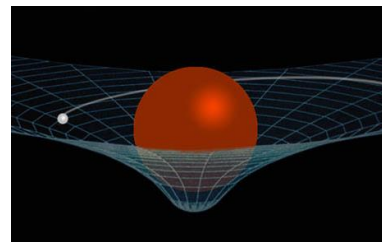
Un campo es **escalar** cuando la magnitud física definida es escalar. Por ejemplo, a cada uno de los puntos la región del espacio de una habitación le podemos asociar la temperatura del mismo; que es una magnitud escalar. Por lo tanto, en esa región tenemos definido un campo escalar: el de temperaturas.

4.2. Campo de fuerza. Campo conservativo y campo escalar asociado

Un factor básico de ciertas interacciones, como la gravitatoria, la eléctrica y la magnética, es que actúan a grandes distancias. El problema de cómo se transmite la interacción a distancia puede interpretarse mediante el concepto de **campo de fuerza**, que fue introducido por primera vez por Faraday a mediados del siglo XIX en el estudio del Electromagnetismo.

Este punto de vista mantiene que *un cuerpo que ejerce una fuerza a distancia sobre otros modifica las propiedades de la región del espacio en la que se manifiesta la fuerza, creando lo que se denomina un **campo fuerza**. Cuando la fuerza es conservativa³, el campo de fuerza recibe el nombre de **conservativo**.*

La modificación de las propiedades del espacio es la responsable de que, al colo-



³Como vimos en el punto 5.5 del tema 1, una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza sobre un cuerpo es función de la posición inicial y final del mismo, pero no depende de la trayectoria.

car en un punto del campo un segundo cuerpo, éste se vea sometido a una fuerza. Por lo tanto, *el campo juega un papel intermedio en la concepción que tenemos de las fuerzas entre cuerpos.*

Un campo de fuerza (conservativo o no) es también un campo vectorial. La razón es que cuando se coloca un cuerpo, en cualquier punto del mismo, que “siente” el efecto del campo experimenta una fuerza; que es una magnitud vectorial.

Vimos en el tema Introducción a la Física que a toda partícula sometida a una fuerza conservativa se le puede asociar una energía potencial, que es un escalar. Así que, *en todos los puntos de una región del espacio en la que existe un campo de fuerza conservativo tenemos definido también un campo escalar asociado al mismo: el de la energía potencial de una partícula determinada.*

4.3. Representación gráfica de los campos

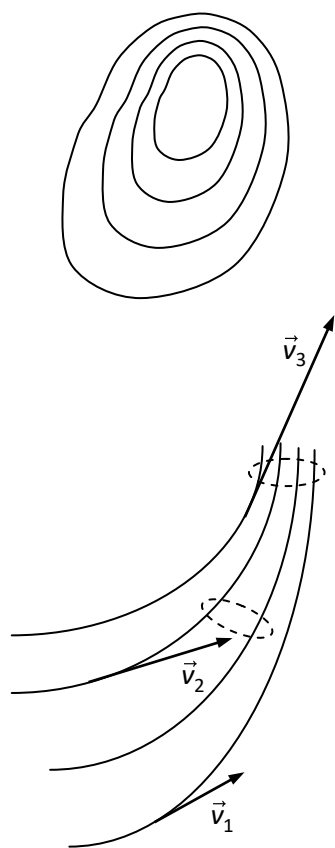
Los campos escalares se representan gráficamente por las llamadas **superficies equipotenciales** o de **nivel**, que son el lugar geométrico de los puntos en los que el campo tiene el mismo valor. Si el campo está definido en un plano se obtienen **líneas de nivel** en lugar de superficies.

Un ejemplo de campo escalar definido en el plano es el de la presión atmosférica a una determinada altura sobre la superficie terrestre. Al unir todos los puntos que tienen igual presión se obtienen unas líneas curvas cerradas que, en Meteorología, se llaman *isobaras*. La figura muestra un ejemplo de isobaras de un campo de presión. Observa que en los lugares en los que las líneas están más juntas, la variación de la magnitud por unidad de longitud es mayor.

Los campos vectoriales se representan gráficamente por medio de las **líneas de campo**, denominadas **de fuerza** si la magnitud es una fuerza, que son líneas tangentes en cada punto al vector que representa el valor de la magnitud vectorial en ese punto y están orientadas de modo que indican su sentido. Las líneas de campo se dibujan de modo que, en cada punto, su densidad⁴ es proporcional al valor del campo en ese punto.

En la figura se ha representado un campo vectorial. Su dirección es en cada punto tangente a la línea de campo que pasa por ese punto y es más intensa en las regiones en las que la densidad de líneas es mayor.

Una propiedad importante de las líneas de campo es que no se pueden cortar. Si dos líneas se cortaran en un punto, entonces, en ese punto, tendríamos dos valores distintos para el campo, lo cual es imposible.



⁴La densidad en un punto es el número de líneas por unidad de superficie colocada en ese punto perpendicular al campo. Si las líneas se distribuyen uniformemente por la superficie, la densidad es constante y se obtiene simplemente dividiendo el número de líneas entre el área de la superficie.

5. El campo gravitatorio creado por una o varias partículas.

Líneas de fuerza

5.1. Concepto de campo gravitatorio. Principio de superposición

El campo de fuerza asociado a la gravitación recibe se llama **campo gravitatorio**.

Una partícula de masa m , fija en un punto del espacio, crea a su alrededor un campo gravitatorio, que se pone de manifiesto porque al colocar otra partícula de masa m' en su radio de acción queda afectada por una fuerza gravitatoria. Sin embargo, la fuerza gravitatoria no es la magnitud adecuada para describir el campo porque su valor, en cada punto, depende de la masa m' que coloquemos en él.

Se define la **intensidad de un campo gravitatorio** ($\vec{g}$) en un punto del mismo como la fuerza que el campo ejerce en ese punto sobre la unidad de masa. Es una magnitud vectorial.

Supongamos un campo gravitatorio que ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre una partícula de masa m' colocada en un punto del mismo. Como la intensidad de la fuerza es directamente proporcional a m' , el cociente $\vec{F}/m'$ no depende de m' , por lo que expresa la fuerza que el campo ejerce sobre la unidad de masa⁵; es decir, la intensidad del campo en ese punto. Así que,

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m'}$$

por lo que su unidad en el S.I. es el N/kg . Esta ecuación es general; es decir, se cumple para cualquier campo gravitatorio.

Sea el campo creado por la partícula de masa m de la figura. La fuerza que ejerce sobre m' , situada a una distancia r , es,

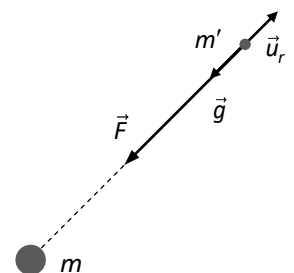
$$\vec{F} = -G \frac{mm'}{r^2} \vec{u}_r$$

y de acuerdo con la definición de la intensidad de campo,

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m'} = \frac{-Gmm'/r^2}{m'} \Rightarrow \vec{g} = -G \frac{m}{r^2} \vec{u}_r$$

donde G es la constante de gravitación universal y $\vec{u}_r$ un vector unitario que tiene la dirección de la recta que une las partículas y el sentido de m a m' . El signo ($-$) se debe a que $\vec{g}$ y $\vec{u}_r$ tienen sentidos opuestos. Como se ve en la figura, $\vec{g}$ tiene la misma dirección y sentido que la fuerza; esto es, está dirigida hacia m . La ecuación pone de manifiesto que $\vec{g}$ no depende de m' , sino que es función de m y de la posición relativa del punto en el que la calculemos (es decir, de r y $\vec{u}_r$). Así que,

La intensidad del campo gravitatorio es la magnitud adecuada para describirlo porque en cada punto depende de la posición del mismo (es decir, de sus coordenadas), pero no de la masa colocada en él.



⁵Efectivamente, por definición de proporcionalidad directa, sea cual sea el valor de m' , el cociente $\vec{F}/m'$ tiene siempre el mismo valor en cada punto particular del campo, aunque varíe de un punto otro. Si en un punto dado hacemos $m' = 1$, tenemos que $\vec{F}/1 = \vec{F} = \vec{cte}$, que expresa la fuerza que el campo ejerce sobre la unidad de masa.

Observa que la última ecuación sólo es aplicable a campos creados por partículas y esferas homogéneas⁶, como es, en una primera aproximación, la Tierra.

Experimentalmente se observa que el campo gravitatorio cumple el **principio de superposición**; es decir, *el campo creado por un cuerpo en un punto es independiente de la presencia de otros posibles cuerpos*. De ello se deduce que la intensidad de un campo gravitatorio creado por varios cuerpos de masas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ es la suma vectorial de las intensidades de cada uno de ellos, es decir

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \dots + \vec{g}_n = \sum_i \vec{g}_i$$

5.2. Representación gráfica del campo gravitatorio

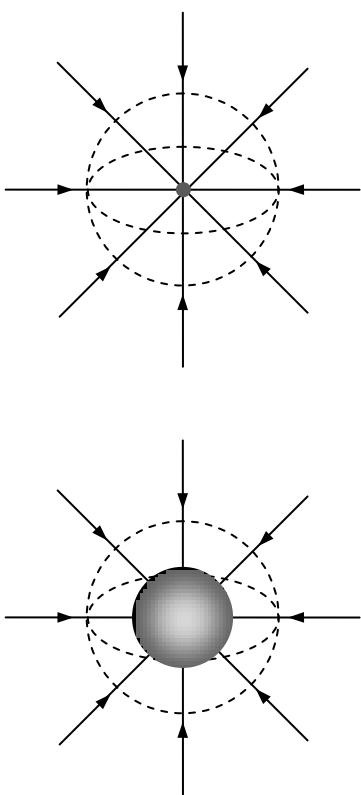
El campo gravitatorio es un campo vectorial que ejerce una fuerza sobre los cuerpos que están en su radio de acción; por lo tanto, se representa gráficamente por medio de líneas de fuerza. Estas líneas son tangentes en cada punto al vector $\vec{g}$ y están orientadas de modo que indican su sentido.

Como la fuerza gravitatoria es central, el campo gravitatorio también lo es y, por lo tanto, las líneas de fuerza del campo creado por una única partícula son radiales y dirigidas hacia la partícula que crea el campo, como se ve en la figura. Las líneas se han dibujado igualmente espaciadas porque, de acuerdo con la ecuación,

$$g = G \frac{m}{r^2}$$

la magnitud de la intensidad del campo tiene el mismo valor en cualquier punto situado a la misma distancia de la partícula. En la figura todos los puntos situados en la esfera dibujada tienen el mismo valor del campo (en magnitud), por lo que la densidad de las líneas de fuerza ha de ser constante en toda su superficie. Para que sea así, tienen que estar uniformemente distribuidas.

Las líneas de fuerza para campos creados por cuerpos no puntuales o conjuntos de cuerpos (puntuales o no) no serán radiales. Las excepciones son, como ya sabemos, los cuerpos esféricos homogéneos (como lo es, en primera aproximación, la Tierra), en los que las líneas de fuerza son también radiales. En este caso las líneas llegan sólo hasta la superficie de la esfera (ver figura); esto es así porque la ecuación de la intensidad del campo sólo es válida para puntos exteriores al cuerpo esférico.



6. Energía potencial gravitatoria. Potencial gravitatorio

En todo el punto vamos a considerar exclusivamente campos creados por partículas o cuerpos esféricos homogéneos en reposo en un sistema inercial.

6.1. Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria: energía potencial

Estudiamos en el tema Introducción a la Física que las fuerzas centrales cuya intensidad depende sólo de la distancia de su punto de aplicación al centro de fuerzas son conservativas; es decir, el trabajo que realizan no depende de la trayectoria.

⁶Sólo es válida si se aplica a puntos exteriores a la esfera.

ria seguida. La fuerza gravitatoria es un ejemplo de este tipo de fuerzas; por lo tanto, *la fuerza gravitatoria es conservativa*⁷.

También estudiamos que *el trabajo de las fuerzas conservativas puede expresarse como la diferencia de valores que toma una función, denominada energía potencial, entre los puntos inicial y final*. La energía potencial asociada a la fuerza gravitatoria se llama **energía potencial gravitatoria**.

Supongamos una partícula de masa m' que se mueve en el campo gravitatorio creado por otra partícula fija⁸ (o un cuerpo esférico homogéneo) de masa m . Tal como se ve en la figura, “obligamos” a m' a moverse desde el punto a al b siguiendo una trayectoria C . El trabajo realizado por $\vec{F}$ sobre m' se obtiene, como vimos en el Tema Introducción a la Física, mediante la integral de línea siguiente,

$$W_{a,c}^b = \int_{a,c}^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$\vec{F} \cdot d\vec{r}$ se puede interpretar como el trabajo infinitesimal realizado por $\vec{F}$ cuando m' se encuentra en el punto cuyo vector de posición es $\vec{r}$ y efectúa un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$, como ilustra la figura (que muestra el detalle de la figura anterior). Ya que la fuerza aplicada es la gravitatoria, el trabajo realizado es,

$$W_a^b = - \int_a^b G \frac{mm'}{r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{r}$$

De la figura, aplicando la definición de producto escalar, se deduce que,

$$\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = |\vec{u}_r| |d\vec{r}| \cos \theta = |d\vec{r}| \cos \theta = dr$$

ya que $|\vec{u}_r| = 1$, por ser el módulo de un vector unitario. Observa en la figura que dr es la componente (escalar) de $d\vec{r}$ en la dirección de $\vec{r}$ y que mide la variación (infinitesimal) que experimenta la magnitud del vector de posición $\vec{r}$ cuando la partícula efectúa el desplazamiento $d\vec{r}$. Por lo tanto, la integral anterior la podemos expresar como,

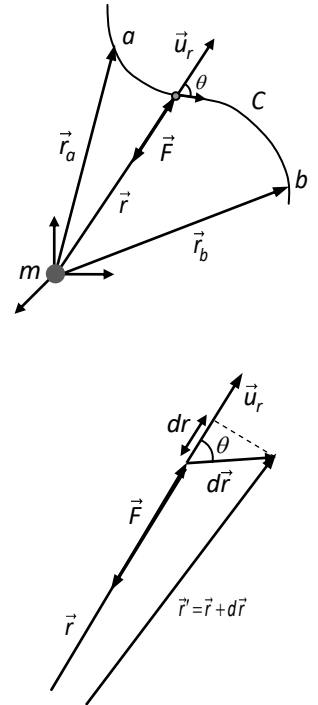
$$W_a^b = - \int_a^b G \frac{mm'}{r^2} dr$$

que es una integral simple. Como G , m y m' son constantes, salen fuera y queda,

$$W_a^b = -Gmm' \int_a^b \frac{1}{r^2} dr$$

La primitiva de la función $1/r^2$ es $-1/r$, por lo tanto, el trabajo es igual a,

$$W_a^b = -Gmm' \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = -G \frac{mm'}{-r_b} - \left(-G \frac{mm'}{-r_a} \right)$$



⁷Es importante destacar que esto es cierto sólo cuando la masa que crea el campo está fija en un sistema de referencia inercial.

⁸Como m' ejerce sobre m una fuerza F igual y opuesta a la que m ejerce sobre m' , la partícula m acelerará; con lo que la fuerza que ejercerá sobre m' ya no será central. Sin embargo, si $m \gg m'$, la aceleración de m ($a = F/m$) es despreciable frente a la de m' ($a = F/m'$) y podemos considerar a m fija. Esto es lo que ocurre en la realidad la mayoría de las veces; por ejemplo, m puede ser el Sol y m' un planeta. Si no se cumple que $m \gg m'$, la única forma de que la fuerza siga siendo central es que un agente externo aplique sobre m una fuerza igual y opuesta a la que m' ejerce sobre m . De este modo la fuerza neta es nula y, por lo tanto, también la aceleración.

que ordenando convenientemente da,

$$W_a^b = -G \frac{mm'}{r_a} - \left(-G \frac{mm'}{r_b} \right) = -Gmm' \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

donde r_a y r_b son, respectivamente, las distancias de m' al centro de fuerzas (esto es, a la partícula m que crea el campo). El resultado demuestra que *el trabajo no depende de la trayectoria seguida*, sino que es función de las distancias de los puntos a y b a la partícula m que crea el campo; es decir, que *la fuerza gravitatoria es conservativa*.

Si tenemos en cuenta que el trabajo de la fuerza gravitatoria, por ser conservativa, es igual a la diferencia de la energía potencial de m' ⁹ entre los puntos inicial (a) y final (b) y suprimimos la trayectoria C de la integral (pues el trabajo no depende de ella), llegamos a,

$$W_a^b = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p(a) - E_p(b)$$

donde $E_p(a)$ y $E_p(b)$ son, respectivamente, las energías potenciales gravitatorias de m' en los puntos a y b . Combinando esta ecuación con la anterior, deducimos para la energía potencial gravitatoria de m' que,

$$E_p(a) - E_p(b) = -G \frac{mm'}{r_a} - \left(-G \frac{mm'}{r_b} \right)$$

6.2. Elección del origen de energía potencial

Recordemos que la energía potencial en un punto no está definida, pues si sumamos a los dos términos del segundo miembro de la ecuación anterior una constante arbitraria C , la expresión queda igual porque la constante se cancela,

$$W_a^b = \left(-G \frac{mm'}{r_a} + C \right) - \left(-G \frac{mm'}{r_b} + C \right) \Rightarrow W_a^b = -G \frac{mm'}{r_a} - \left(-G \frac{mm'}{r_b} \right)$$

es decir, la función energía potencial de m' en un punto del campo de vector de posición $\vec{r}$ es,

$$E_p(\vec{r}) = -G \frac{mm'}{r} + C$$

donde C es una constante indeterminada. Debido a esto, podemos dar a C el valor que haga que la energía sea cero en el punto que más convenga. *Este punto se toma como referencia (nivel cero) para medir las energías potenciales en los demás puntos.*

Habida cuenta de que la fuerza gravitatoria que m ejerce sobre m' es nula cuando $r = \infty$, parece razonable elegir el infinito como referencia, asignando el valor nulo a la energía potencial de toda partícula situada en él. Esto es,

$$E_p(\infty) = -\frac{Gmm'}{r_\infty} + C = C = 0 \Rightarrow C = 0 \quad (\text{por convenio})$$

⁹En realidad la energía potencial está asociada a la fuerza gravitatoria que se ejercen los cuerpos que interaccionan; o sea, a todo el sistema. Decir “energía potencial de una partícula” es incorrecto, pero se admite si se entiende su significado.

En la práctica, cualquier punto lo suficientemente alejado del cuerpo que crea el campo tal que la interacción gravitatoria en él la podamos considerar despreciable, puede ser tomado como referencia. De estos puntos se dice que están fuera del campo.

De acuerdo con la ecuación que relaciona el trabajo con la energía potencial, el trabajo realizado por el campo cuando m' se traslada desde un punto (a) cuyo vector de posición es $\vec{r}$ hasta otro (b) que está fuera del campo (∞), ver figura, es,

$$W_a^b = W_r^\infty = E_p(\vec{r}) - E_p(\infty) = -G \frac{mm'}{r} - \left(-G \frac{mm'}{r_\infty} \right)$$

como $Gmm'/r_\infty = 0$ y $E_p(\infty) = 0$ por convenio, queda que,

$$W_r^\infty = E_p(\vec{r}) = -G \frac{mm'}{r}$$

que es la expresión de la energía potencial de una partícula de masa m' en el interior de un campo gravitatorio creado por otra partícula de masa m . Por lo tanto, *la energía potencial en un punto, si se elige el infinito como referencia, expresa el trabajo realizado por el campo cuando m' se desplaza desde ese punto hasta otro que está fuera del campo.*

El signo menos se debe a que el trabajo es negativo, pues la fuerza gravitatoria es de atracción y es necesario aplicar una fuerza externa en sentido contrario (es decir, aportar energía) para sacar a la partícula del campo.

Es importante recordar que las ecuaciones encontradas son válidas para campos creados por partículas y por cuerpos esféricos homogéneos (sólo si se aplican a puntos exteriores).

El campo gravitatorio cumple el principio de superposición y la energía potencial es una magnitud escalar. Por lo tanto, para un campo creado por varias partículas de masas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$; la energía potencial de una masa m' en un punto es la suma algebraica de las energías potenciales de los campos individuales creados por $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$; es decir,

$$E_p = E_{p,1} + E_{p,2} + \dots + E_{p,n}$$

Si tenemos una partícula dentro de un campo gravitatorio situada en un punto definido por el vector de posición $\vec{r}$ (ver figura) y queremos sacarla fuera del mismo, tenemos que ejercer una fuerza externa *mínima* igual y opuesta a la ejercida por dicho campo; es decir,

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{campo}$$

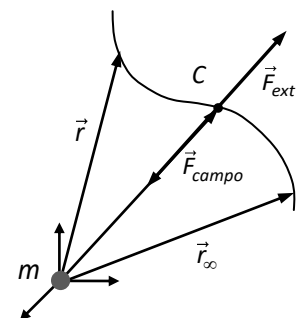
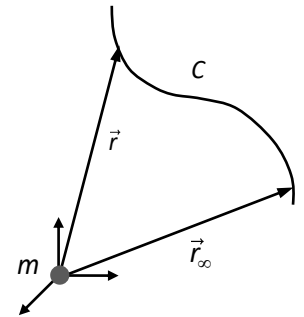
entonces, como ambas fuerzas actúan sobre el mismo cuerpo, realizan el mismo trabajo pero de signo opuesto. Esto es,

$$W_r^\infty(ext) = -W_r^\infty(campo)$$

pero como,

$$W_r^\infty(campo) = E_p(\vec{r}) - E_p(\infty) = E_p(\vec{r})$$

se obtiene, combinando las ecuaciones anteriores, que,



$$W_r^\infty(\text{ext}) = -E_p(\vec{r}) = G \frac{mm'}{r}$$

que es una cantidad positiva. Es decir *el negativo de la energía potencial* (que es una cantidad positiva) *es igual al trabajo mínimo que ha de efectuar (o la energía mínima que ha de ceder¹⁰) un agente externo a la partícula m' para sacarla del campo.*

Nota que a medida que m' se aleja del campo aumenta su energía potencial (r aumenta y E_p es negativa). Si m' se abandona en reposo en un punto cualquiera, debido a la fuerza gravitatoria, se moverá *espontáneamente*, hacia el cuerpo que crea el campo; es decir, *en el sentido en el que la energía potencial decrece.*

6.3. Potencial gravitatorio. Su relación con el trabajo

Se define el **potencial gravitatorio** (V) en un punto de un campo como la energía potencial que adquiere la unidad de masa colocada en ese punto.

Si una partícula de masa m' tiene una energía potencial $E_p(\vec{r})$ en el punto definido por $\vec{r}$, el potencial en el mismo es¹¹,

$$V(\vec{r}) = \frac{E_p(\vec{r})}{m'}$$

por lo que su unidad en el S.I es el J/kg. Como ocurría con la intensidad del campo, esta ecuación es general; es decir, se cumple para cualquier campo gravitatorio.

Observa que, puesto que el potencial es la energía potencial por unidad de masa, todos los resultados obtenidos para la energía potencial son aplicables para el potencial, sin más que aplicarlos a la unidad de masa.

Combinando las ecuaciones que relacionan la energía potencial con el trabajo y con el potencial, tenemos,

$$\left. \begin{array}{l} W_a^b = E_p(a) - E_p(b) \\ V = E_p/m' \Rightarrow E_p = m'V \end{array} \right\} \Rightarrow W_a^b = m'V(a) - m'V(b)$$

sacando factor común a m' y despejando,

$$W_a^b = m'[V(a) - V(b)] \Rightarrow V(a) - V(b) = \frac{W_a^b}{m'}$$

que relaciona el trabajo con la diferencia de potencial. Si el vector de posición del punto a sea $\vec{r}$ y el punto b se encuentre fuera del campo, tenemos que,

$$\left. \begin{array}{l} V(b) = V(\infty) = E_p(\infty)/m' \\ V(\vec{r}) - V(\infty) = W_r^\infty/m' \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{V(\vec{r}) = \frac{W_r^\infty}{m'}}$$

que relaciona el potencial en un punto del campo con el trabajo. Expresa que el *potencial en un punto de un campo es igual al trabajo realizado por dicho campo*

¹⁰Recuerda que el trabajo realizado por una fuerza sobre un cuerpo no es más que una forma de comunicarle energía. El trabajo es igual a la energía comunicada.

¹¹Utilizando el mismo argumento que se vio en la intensidad del campo, ya que la energía potencial es proporcional a la masa.

sobre la unidad de masa cuando ésta se traslada desde ese punto hasta el infinito.

En el caso particular de una partícula o una esfera homogénea, tenemos que,

$$\left. \begin{aligned} E_p(\vec{r}) &= -Gmm'/r \\ V(\vec{r}) &= E_p(\vec{r})/m' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{V(\vec{r}) = -G\frac{m}{r}}$$

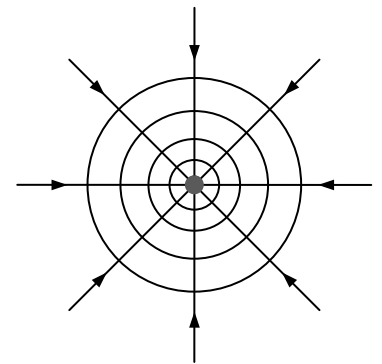
6.4. Superficies equipotenciales

El potencial gravitatorio es una magnitud escalar que no depende de m' y está definido en todos los puntos del campo. Por lo tanto, en los puntos en los que se manifiesta el campo gravitatorio tenemos definido un campo escalar: *el de los potenciales gravitatorios*.

Los campos escalares se representan gráficamente, como ya sabemos, por superficies equipotenciales. En la figura se han dibujado las superficies equipotenciales (y las líneas de fuerza) de un campo creado por una partícula. Son esferas concéntricas centradas en la partícula que crea el campo porque, de acuerdo con la ecuación del potencial, los puntos situados en una esfera con centro en la partícula tienen el mismo potencial.

Las superficies equipotenciales se dibujan de forma que la distancia de separación entre dos contiguas se corresponda siempre con la misma variación del potencial. La razón de que en la figura su separación vaya aumentando es que al alejarnos de la masa que crea el campo, una misma variación del potencial implica una distancia mayor. Basta aplicar la ecuación del potencial en dos puntos del campo situados a distancias distintas de la masa que lo crea para comprobarlo.

Observa que la figura muestra que las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales son perpendiculares en cada punto, lo que es general a todos los campos de fuerza conservativos.



7. Campo gravitatorio terrestre. Energía potencial en las proximidades de la superficie de la Tierra

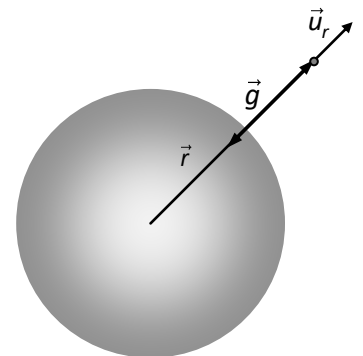
7.1. Definición del campo gravitatorio terrestre. Su valor en la superficie de la Tierra. Variación del campo con la altura

De acuerdo con la definición general de intensidad de campo gravitatorio, *la intensidad del campo gravitatorio terrestre en un punto exterior a la Tierra es la fuerza que ésta ejerce en ese punto sobre la unidad de masa*.

Teniendo en cuenta que la Tierra (ver figura) se puede considerar como una esfera homogénea, podemos aplicar la ecuación del campo gravitatorio creado por una partícula. Así pues, la intensidad del campo gravitatorio terrestre ($\vec{g}$) en un punto exterior a la Tierra es,

$$\vec{g} = -G \frac{M_T}{r^2} \vec{u}_r$$

donde M_T es la masa terrestre, r la distancia entre el punto en el que queremos obtener $\vec{g}$ y el centro de la Tierra, G la constante de gravitación universal y $\vec{u}_r$ el



vector unitario que muestra la figura. El signo “-” es necesario para expresar que $\vec{g}$ (dirigido al centro de la Tierra) y $\vec{u}_r$ tienen sentidos opuestos. La magnitud del campo es,

$$g = G \frac{M_T}{r^2}$$

En el caso particular (pero muy importante) de puntos próximos a la superficie de la Tierra, tenemos que $r \approx R_T$, donde R_T es el radio terrestre. Entonces el campo se representa por g_0 y la ecuación anterior queda como,

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{(6,375 \cdot 10^6)^2} = 9,81 \frac{N}{kg}$$

que es la intensidad del campo gravitatorio en un punto de la superficie. Como la Tierra no es una esfera perfecta ni homogénea, g_0 y el peso varían ligeramente de un punto a otro.

Podemos expresar la intensidad del campo en función de la altura respecto a la superficie terrestre. En un punto situado a una distancia r del centro de la Tierra, como se ve en la figura, la magnitud de la intensidad del campo es,

$$g = G \frac{M_T}{r^2} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \quad \text{pues } r = R_T + h$$

donde h es la altura del punto. Multiplicando y dividiendo el segundo término de la ecuación por el radio de la Tierra al cuadrado tenemos que,

$$g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \frac{R_T^2}{R_T^2} = G \frac{M_T}{R_T^2} \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$

pero $g_0 = GM_T/R_T^2$, por lo que, sustituyendo y simplificando,

$$g = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} = g_0 \frac{1}{[(R_T + h)/R_T]^2} \Rightarrow \boxed{g = g_0 \frac{1}{(1 + h/R_T)^2}}$$

que expresa g en función de h , g_0 y R_T . Nota que para puntos próximos a la superficie terrestre, el cociente h/R_T es muy pequeño y $(1 + h/R_T)^2 \approx 1$, por lo que, como era de esperar, $g \approx g_0$.

7.2. Intensidad del campo y aceleración de la gravedad en la S.T.

Consideremos un cuerpo de masa m en la superficie de la Tierra. Si designamos por P a la intensidad de la fuerza con la que ésta lo atrae; esto es, su peso, entonces, de acuerdo con la definición de g , tenemos que,

$$g = P/m \Rightarrow P = mg$$

pero, por otro lado, aplicando la 2ª ley de Newton, se tiene que,

$$P = ma$$

donde a es la aceleración que la Tierra imprime al cuerpo cuando lo atrae. Así,

$$mg = ma \Rightarrow a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

que refleja que la aceleración de la gravedad es **numéricamente** igual a la intensidad del campo. Ha de quedar claro, sin embargo, que se trata de conceptos físi-

camente diferentes.

7.3. Energía potencial en las proximidades de la S.T.

La energía potencial de una partícula de masa m que se encuentra en un punto del campo situado a una distancia r del centro de la Tierra, tomando el infinito como referencia, es,

$$E_p(\vec{r}) = -G \frac{M_T m}{r}$$

y si m se encuentra en la superficie,

$$E_p(S) = -G \frac{M_T m}{R_T}$$

Consideremos una masa m situada a una altura h sobre la superficie terrestre (con $h \ll R_T$) que se mueve hasta otro punto situado en la propia superficie de la Tierra, como ilustra la figura. La diferencia de energía potencial de m entre los dos puntos, *independientemente del punto de referencia elegido*, es,

$$E_p(h) - E_p(ST) = -G \frac{M_T m}{R_T + h} - \left(-G \frac{M_T m}{R_T} \right)$$

donde $E_p(ST)$ es la energía potencial de m en la superficie de la Tierra. Operando en el segundo miembro de la ecuación,

$$E_p(h) - E_p(ST) = GM_T m \left(\frac{R_T + h}{(R_T + h)R_T} - \frac{R_T}{(R_T + h)R_T} \right) = GM_T m \frac{h}{R_T^2 + hR_T}$$

pero como $h \ll R_T$, podemos despreciar hR_T frente a R_T^2 . Entonces,

$$E_p(h) - E_p(ST) = G \frac{M_T}{R_T^2} m h$$

pero $g_0 = GM_T / R_T^2$, por lo que,

$$E_p(h) - E_p(ST) = mg_0 h$$

Si en este caso particular *tomamos como referencia para medir la energía potencial la propia superficie terrestre*, tenemos que $E_p(ST) = 0$, por lo que la energía asociada a m a una altura h es,

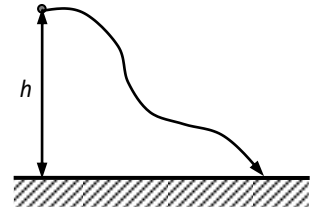
$$E_p(h) = mg_0 h$$

De la relación entre la energía potencial y el trabajo tenemos,

$$W_h^{ST} = E_p(h) - E_p(ST) = E_p(h) = mg_0 h$$

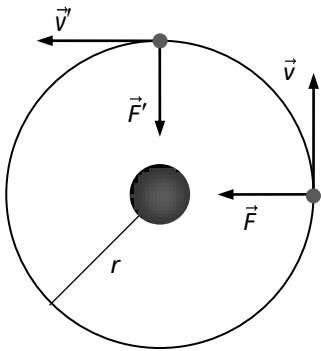
por lo que $mg_0 h$ expresa el trabajo realizado por el campo cuando m se desplaza desde un punto situado a una altura h ($h \ll R_T$) hasta otro situado en la superficie de la Tierra.

Si eligiéramos como referencia para medir la energía potencial un plano paralelo a la superficie de la Tierra, h y E_p representarían respectivamente la altura y la energía potencial de m respecto a ese plano.



8. Estudio del movimiento de planetas y satélites y de la velocidad de escape

En todo el punto consideraremos dos cuerpos: uno esférico homogéneo de masa M y otro de masa m supuesto puntual, donde $M \gg m$, de modo que M se encuentra prácticamente en reposo en un sistema inercial. *Esto es aplicable a los planetas y a los satélites (naturales y artificiales).*



8.1. Velocidad en una órbita circular

Como se explicó en el punto 3.2 y muestra la figura, la fuerza centrípeta (F_c) que mantiene a un planeta (o a un satélite) en una órbita circular de radio r es la fuerza gravitatoria (F_g); así que,

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c \Rightarrow F_g = F_c \text{ (en magnitud)}$$

Como la fuerza centrípeta no modifica la magnitud de la velocidad, ésta permanece constante en su órbita circular; es decir, que el movimiento es circular uniforme. Aplicando las ecuaciones de las fuerzas gravitatoria y centrípeta para una órbita circular, tenemos,

$$\left. \begin{array}{l} F_g = GMm/r^2 \\ F_c = mv^2/r \end{array} \right\} \Rightarrow m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v^2 = G \frac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

que prueba que *la velocidad del planeta (o satélite) en su órbita no depende de su masa, sino solo de la masa M que crea el campo y del radio de la órbita.*

8.2. Energía mecánica en una órbita circular

La energía mecánica de m referida al sistema inercial en el que M está en reposo es,

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r} = \text{cte}$$

donde la energía mecánica ha de mantenerse constante ($E_m = \text{cte}$) porque que la fuerza gravitatoria es conservativa. Puesto que la órbita es circular,

$$v^2 = GM/r$$

y sustituyendo el valor de v^2 hallado en la ecuación de la energía,

$$E_m = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow \boxed{E_m = -G \frac{Mm}{2r}}$$

lo que indica que, *cuando una partícula se mueve con una órbita circular en el campo gravitatorio creado por otra partícula cuya masa es mucho mayor, su energía mecánica es negativa y viene dada por la expresión anterior.*

Este resultado es más general de lo que nuestra deducción pueda sugerir, ya que *también es válida para órbitas elípticas*. En este caso,

$$E_m = -G \frac{Mm}{2a}$$

donde a es el semieje mayor de la elipse, que coincide con el radio medio de la órbita; es decir $R_m = a$.

8.3. Tipos de órbitas según el valor de la energía

El hecho de que la energía total de m sea negativa significa que la energía cinética no es suficiente, en ningún punto de la órbita, para llevarla al infinito (o sea, para sacarla del campo). Esto es evidente porque, a una distancia infinita, el segundo término del segundo miembro de la ecuación,

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

es cero y tenemos $E_c = \frac{1}{2}mv^2 > 0$, relación imposible de cumplir si $E_m < 0$. Puesto que m no puede salir del campo, *la trayectoria que sigue tiene que ser cerrada. Es posible demostrar que se trata de una trayectoria elíptica o circular.* Cuando el momento angular de m respecto a M es el máximo posible la trayectoria es circular; en cualquier otro caso es elíptica. Cuanto más se desvía el momento angular de su valor máximo, más excentricidad tiene la órbita.

Consideremos ahora que el cuerpo de masa m tiene energía positiva; esto es, tiene una velocidad v cuando está a una distancia r tal que E es mayor que cero. La partícula puede entonces alcanzar el infinito (salir del campo) y tener aún algo de energía. Esto es así porque a medida que la partícula se aleja del campo, la energía potencial aumenta¹² y la energía cinética ha de disminuir ya que la energía mecánica permanece constante. Si hacemos $r = \infty$ en la ecuación de la energía y llamamos v_∞ a la velocidad de la partícula en el infinito, entonces (como la $E_p = 0$),

$$E_m = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - G\frac{Mm}{r_\infty} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \Rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

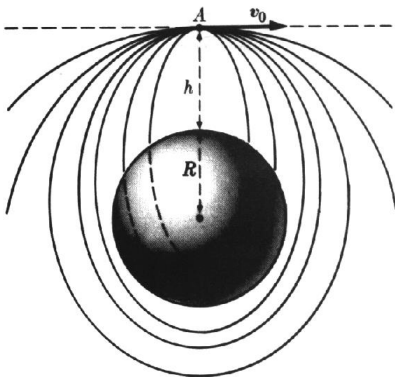
Supongamos ahora que m se encuentra a una distancia muy grande del campo creado por M y es lanzada hacia ésta con una velocidad v_∞ , conocida como **velocidad de acercamiento**, de modo que la energía está determinada por la ecuación anterior. Conforme la partícula m se acerca a M , su energía potencial disminuye (se hace más negativa) y su energía cinética aumenta; alcanzando su valor máximo en el punto cuya distancia a M es mínima¹³. Después, la partícula comienza a alejarse perdiendo energía cinética, hasta que finalmente, a grandes distancias, su velocidad es nuevamente v_∞ . *La trayectoria es una curva abierta y se puede demostrar que es una hipérbola.* Este es el caso de algunos cometas cuando se acercan al Sistema Solar.

El caso particular de energía total cero ($E_m = 0$) resulta de interés porque entonces la partícula, de acuerdo con la ecuación anterior de la velocidad, está en reposo en el infinito ($v_\infty = 0$). *La órbita sigue siendo abierta, pero en lugar de ser una hipérbola, se trata de una parábola.* Físicamente corresponde a la situación en que la partícula m es liberada a una distancia de M con una velocidad inicial que hace que $E_c = -E_p$.

Estos resultados son importantes cuando se coloca un satélite artificial en órbita. Supongamos que un satélite se lanza desde la Tierra; después de alcanzar su altura máxima, h , recibe un empuje final en el punto A (figura), que le comunica una

¹²Al aumentar r , la $E_p = -GMm/r$ también aumenta ya que E_p es negativa.

¹³Este punto depende del valor del momento angular de m respecto a M .



velocidad horizontal v_0 , conocida como velocidad de inserción. La energía total del satélite en A con respecto a la Tierra es,

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{M_T m}{R_T + h}$$

La órbita será una elipse, una parábola o una hipérbola, dependiendo de si E es negativa, nula o positiva. En todos los casos, el centro de la Tierra está en un foco de la trayectoria. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación anterior, el satélite se mantendrá en movimiento en una órbita elíptica o se escapará de la Tierra, dependiendo de si,

$$v_0^2 < \frac{2GM}{R_T + h} \quad \text{ó} \quad v_0^2 \geq \frac{2GM}{R_T + h}$$

Si la energía es muy pequeña, la órbita elíptica interceptará a la Tierra y el satélite caerá sobre su superficie (ver figura). Las mismas consideraciones se pueden aplicar a los satélites naturales como la Luna y a los planetas en sus órbitas solares.

8.4. Velocidad de escape

La **velocidad de escape de un astro** es la velocidad mínima con la que un cuerpo debe ser lanzado desde su superficie de ese astro para que abandone su campo gravitatorio (en teoría para que alcance el infinito).

Para que esto suceda la energía del cuerpo ha de ser nula o positiva y, por lo tanto, la velocidad mínima corresponderá a una energía total nula. Entonces, podemos obtener la velocidad de escape (v_e) aplicando la ecuación de la energía mecánica e igualándola a cero; es decir,

$$0 = \frac{1}{2}mv_e^2 - G \frac{Mm}{R} \Rightarrow v_e^2 = \frac{2GM}{R} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

donde M es la masa del astro, R su radio y m la masa del cuerpo.

En el caso particular de la Tierra, de masa M_T y radio R_T , tenemos que,

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

pero recordando que la intensidad del campo en la superficie es,

$$g_0 = GM_T / R_T^2 \Rightarrow g_0 R_T = GM_T / R_T$$

se obtiene al sustituir en la ecuación anterior que,

$$v_e = \sqrt{2g_0 R_T} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 6,375 \cdot 10^6} = 1,12 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Esta velocidad no depende de la masa del cuerpo, pero la fuerza requerida para acelerarlo hasta que alcanza la velocidad de escape sí depende de su masa. Es por ello que los misiles y satélites más pesados requieren propulsores más potentes.

9. El problema de los tres cuerpos: caos determinista

A partir de la segunda mitad del siglo XX se comienza a enviar naves al espacio, cuya misión es obtener información sobre el espacio exterior. Durante el viaje, las naves salen del campo gravitatorio terrestre y entran en otros campos gravitato-

rios, como el de la Luna y los de otros planetas. Para conocer su movimiento hay que estudiar el comportamiento de cuerpos sometidos a la acción de varios campos gravitatorios simultáneamente.

La ley de la gravitación universal de Newton explica perfectamente el movimiento de dos cuerpos que se encuentran bajo la atracción gravitatoria mutua, como el Sol y la Tierra, la Tierra y la Luna o la Tierra y un satélite artificial. El cuerpo pequeño gira en torno al grande¹⁴ describiendo una órbita estacionaria (que por simplicidad supondremos circular) con un periodo de rotación relacionado con la distancia que separa ambos cuerpos.

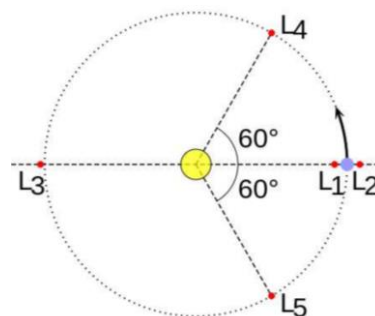
El problema es mucho más complejo cuando se tienen tres o más cuerpos bajo una acción gravitatoria mutua. En 1772 los matemáticos Lagrange y Euler estudiaron, con algunas restricciones, el problema de los tres cuerpos. Supusieron dos cuerpos de masas M_1 y M_2 , (donde $M_1 > M_2$), de modo que M_1 y M_2 describen órbitas aproximadamente circulares en torno al centro de masas del sistema. Y un tercer cuerpo de masa m despreciable frente a las otras dos. Como ejemplos de esta situación tenemos un satélite artificial que se mueve bajo la acción de la Tierra y la Luna o del Sol y la Tierra.

Para estos sistemas, Lagrange y Euler encontraron cinco puntos (L_1 , L_2 , L_3 , L_4 y L_5), que son los indicados en la figura, en los que m , al colocarla en cualquiera de ellos, describiría una órbita circular en torno al centro de masas de M_1 y M_2 del mismo periodo que el de M_2 , que es igual al de M_1 . El hecho de que el periodo sea el mismo significa que la posición relativa de M_1 y M_2 respecto a m no cambia; es decir, si un observador se coloca en una de esas órbitas, siempre verá a M_1 y a M_2 en la misma posición.

Trazando las superficies equipotenciales¹⁵ del sistema observaron que:

- Los puntos L_4 y L_5 son de **equilibrio estable**. Es decir, si m se separa un poco de la órbita que pasa por ese punto, las fuerzas gravitatorias de M_1 y M_2 la obligan a volver a ella.
- Los puntos L_1 , L_2 y L_3 son de **equilibrio inestable**. Es decir, si m se separa un poco de la órbita que pasa por ese punto, las fuerzas gravitatorias de M_1 y M_2 la sacan de la órbita. En la terminología actual decimos que se trata de un **caos determinista**: la trayectoria de m está perfectamente determinada por las fuerzas gravitatorias, pero un pequeño cambio en las condiciones de origen provocan un gran efecto, alejándolo de la órbita.

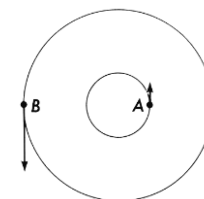
Hay que subrayar que aunque estos puntos son de equilibrio inestable, la energía que requeriría una nave espacial colocada en uno de ellos para mantener la órbita sería realmente mínima.



¹⁴Esto se cumple solo cuando la masa de uno de los dos cuerpos es mucho mayor que la del otro. En los demás casos ambos cuerpos giran en torno al centro de masas del sistema que forman los dos objetos, como se ve en la figura.

En el tema Introducción a la Física se definió el centro de masas de un sistema. En el caso particular de dos cuerpos esféricos y homogéneos, este punto se encuentra en el segmento de la recta que une los centros de las dos esferas y más próximo al cuerpo con mayor masa.

¹⁵Lugar geométrico de los puntos en los que la energía potencial de m es la misma. La intersección de las superficies equipotenciales con el plano en el que giran las tres masas permite obtener las líneas equipotenciales en el plano de giro, que son las que realmente tienen importancia.



Utilidad de los puntos de Lagrange

En las últimas décadas del siglo XX, el gran desarrollo de la potencia de cálculo de los ordenadores ha propiciado la posibilidad de utilizar los puntos de Lagrange para llevar a cabo misiones espaciales.

Para los sistemas Sol-Tierra o Tierra-Luna, una nave espacial hace de tercer cuerpo, de masa despreciable. Si se sitúa en uno de los puntos L , excepto L_3 que está siempre detrás del Sol, podrá realizar observaciones en una posición de equilibrio (o sea, desde una posición estática relativa a los otros dos cuerpos). Por ejemplo, el punto L_2 es privilegiado para la observación del espacio exterior y el punto L_1 es idóneo para la observación del Sol y del **viento solar**¹⁶.

Autopistas espaciales

Son las vías que pueden seguir las naves espaciales para desplazarse de un lugar a otro del espacio utilizando la menor cantidad de energía posible.

Se utilizan los puntos L de equilibrio inestable Sol-planeta y planeta-satélite. Una pequeña desviación de la posición de equilibrio desplaza la nave a lugares alejados sin apenas gasto energético. Se cree que así han viajado cometas y asteroides que han traído a la Tierra los elementos necesarios para la vida o que la han modificado drásticamente, como el asteroide que provocó la extinción de los dinosaurios.

10. Satélites artificiales

En la actualidad hay alrededor de mil satélites artificiales girando en torno a la Tierra con distintos fines: científicos, militares, informativos, ... Aunque la densidad de tráfico es grande, es difícil que se produzcan colisiones entre ellos porque sus órbitas están bien definidas, de acuerdo con las normas internacionales.

Según la altura a la que se encuentran los satélites respecto a la superficie de la Tierra, sus órbitas más importantes se clasifican en:

- **Órbitas LEO** (Low Earth Orbit). Se encuentran por debajo de los 5000 km, la mayor parte entre los 600 y 2000 km. Tienen poca cobertura, por esta razón se necesitan muchos satélites de este tipo para lograr una cobertura mundial. Esta saturación de órbitas supone una serie de problemas, como el número de antenas terrestres necesario para recibir la información, incremento de la chatarra espacial y una alta probabilidad de que satélites descontrolados caigan a la superficie terrestre, con el riesgo que esto supone. Además consumen combustible para mantener la órbita estable como consecuencia de la fricción con las capas más altas de la atmósfera.
Se emplean, entre otras cosas, para proporcionar datos geológicos de las placas terrestres, telefonía por móvil y buscapersonas. La estación espacial internacional está en una de estas órbitas.
- **Órbitas MEO** (Medium Earth Orbit). Se posicionan entre los 10000 y los 20000 km de altura. Tienen mayor cobertura que los LEO, por lo que necesitan me-

¹⁶Partículas emitidas por el Sol con carga eléctrica y muy energéticas, principalmente protones y núcleos de helio.

nos antenas de seguimiento. Respecto a la chatarra espacial, presentan los mismos problemas que los satélites LEO.

Se utilizan fundamentalmente para la geolocalización; o sea para los GPS.

- **Órbitas GEO.** Tienen sus órbitas circulares situadas a una altura fija de 35786 km sobre el ecuador, por lo que su velocidad orbital es constante. A esta altura la velocidad angular del satélite coincide con la de la Tierra, por lo que ambos tienen el mismo periodo de rotación (24 h), lo que significa que un observador estático en la superficie de la Tierra percibe a estos satélites como puntos estáticos en el cielo. Por esta razón reciben el nombre de **geosíncronos** o **geoestacionarios**.

Puesto que estos satélites se encuentran en puntos fijos, no necesitan un equipo de rastreo y las antenas se orientan directamente hacia ellos de forma permanente. Esta es la razón por la que, siempre que es posible, se emplean satélites geoestacionarios.

Se utilizan, entre otras cosas, en emisiones de TV vía satélite, comunicaciones y meteorología.

Una gran ventaja de estos satélites es que son suficientes tres para cubrir todo el globo y asegurar un sistema de comunicación mundial. Un inconveniente es que, al estar a gran altura, se producen retrasos (de 500 a 600 ms) entre la ida y la vuelta de una señal que pasa por un satélite geoestacionario.

11. Materia oscura y energía oscura

Los modelos cosmológicos de la física actual se basan en la **Teoría general de la relatividad** que A. Einstein (1879-1955) propuso en 1915. Esta teoría emplea la noción de campo y sustituye el concepto de fuerza gravitatoria por el de curvatura o deformación del espacio-tiempo.

La base central de la cosmología moderna es el **principio cosmológico**, que afirma que el Universo es homogéneo e isótropo¹⁷ a escala suficientemente grande; es decir, *el Universo es finito, pero no tiene ni centro ni bordes. Desde cualquiera de sus puntos se observa globalmente lo mismo*

Para explicar la expansión del Universo descubierta por Hubble, se propuso la teoría del **big bang**, cuya idea esencial es que el Universo se expande continuamente a partir de una gran explosión de un minúsculo estado inicial de altísima densidad y energía que tuvo lugar hace entre 12.000 y 15.000 mil millones de años.

La evolución del Universo depende, según la teoría general de la relatividad, de la **densidad global de masa-energía** que contiene. Si ésta es baja, la expansión continuará indefinidamente; pero si es lo suficientemente alta, la expansión se frenará y terminará ocurriendo una contracción.

Como ya sabemos, la velocidad orbital de los planetas en el sistema solar decrece al aumentar la distancia entre el planeta y el Sol, siendo esto una consecuencia de la ley de gravitación universal. Por el mismo razonamiento, cabe esperar que las

¹⁷Que tiene las mismas propiedades en todas las direcciones.

estrellas que forman una galaxia sigan un patrón similar; es decir, que la velocidad de las estrellas más externas fuera menor que la de las más internas. Sin embargo, en 1967 la astrónoma Vera Rubin determinó la velocidad de rotación de algunas estrellas de la galaxia Andrómeda¹⁸, constatando que era prácticamente constante. Este hecho llevó a pensar a los científicos en la posible presencia de materia gravitatoria no visible que explicara la anómala rotación de las galaxias.

La idea, aparentemente descabellada, de materia no visible se vio reforzada por las grandes discrepancias que existen cuando se estima la masa de una galaxia utilizando la ley de la gravitación universal y cuando se hace midiendo la luminosidad de la misma. Al usar el primer método, la masa obtenida de la galaxia es mucho mayor que cuando se utiliza el segundo, lo que refuerza la existencia de una materia que interacciona gravitatoriamente pero que no se ve. Este tipo de materia sería seis veces más abundante que la materia ordinaria y se conoce con el nombre de **materia oscura**.

Otro de los grandes interrogantes tiene que ver con el descubrimiento relativamente reciente de la expansión ligeramente acelerada del Universo; en contra de lo que cabría esperar después del big bang: una expansión decelerada, como consecuencia de la atracción gravitatoria. Para explicar este hecho se postula con la existencia de una **energía oscura**, de naturaleza desconocida y que ejercería fuerzas repulsivas sobre la materia.

De acuerdo con la ecuación de Einstein $E = mc^2$ (que prueba que la masa no es más que una forma de energía; es decir, una energía almacenada como masa), el Universo estaría formado por: un 4 % de materia ordinaria, un 22 % de materia oscura y un 74 % de energía oscura.

¹⁸ Andrómeda es una galaxia vecina a la Vía Láctea, que es donde se encuentra nuestro Sol.

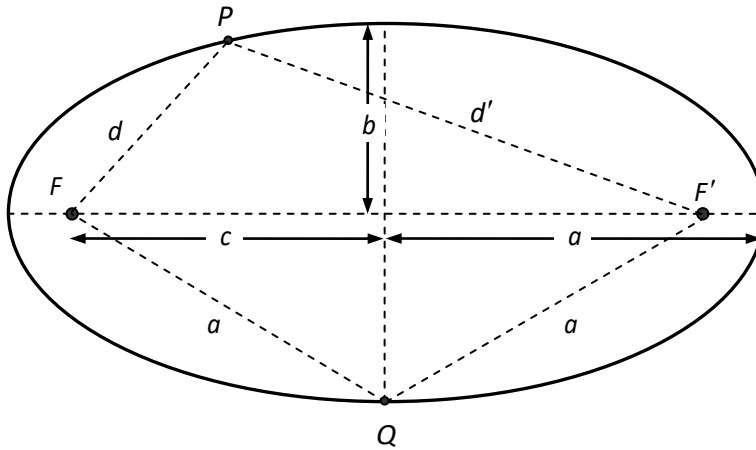
Consideraciones sobre la elipse

La elipse puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, F y F' permanece constante e igual a $2a$, donde a es el semieje mayor de la elipse (ver figura), esto es,

$$d + d' = 2a$$

de esta ecuación se deduce que,

$$FQ = F'Q = a$$



Además de la figura se desprende que $a^2 = b^2 + c^2$ donde c es la distancia de un foco al centro de simetría de la elipse.

Se define la excentricidad de la elipse, e , por la siguiente relación: $e = c/a$, que es menor que la unidad. Evidentemente, para una circunferencia F y F' coinciden, por lo que $c = 0$ y $e = 0$.