FÍSICA 1º DE BACHILLERATO

TEMA 3: LAS FUERZAS. LEYES DE LA DINÁMICA

1. La fuerza como interacción.
2. Las fuerzas y su medida. carácter vectorial de las fuerzas.
3. Leyes de Newton.
   3.1. Primera: Ley de inercia.
   3.2. Segunda: Ley fundamental de la Dinámica.
   3.3. Tercera: Ley de acción y reacción.
4. Fuerzas de rozamiento.
5. Fuerzas elásticas.
6. Momento lineal e impulso mecánico.
7. Principio de conservación del momento lineal.
8. Dinámica del movimiento circular.
9. Momento de una fuerza y momento angular.
   9.1. Relación entre el momento de una fuerza y el momento angular.
   9.2. Conservación del momento angular. Fuerzas centrales.

Autor: Luis A. Cordón Montón
Catedrático de Física y Química
IES “Sancho III el Mayor” (Tafalla)

1. La fuerza como interacción

En Cinemática hemos estudiado el movimiento de los cuerpos sin preguntarnos sobre las causas que lo originan. En este tema discutiremos esas **causas** y la relación entre ellas y el movimiento que originan, campo que se denomina ***Dinámica***.

El enfoque de la Dinámica que vamos a considerar (junto con la Cinemática) recibe el nombre de ***Mecánica Clásica*** y fue desarrollada por Newton en el siglo XVII. En el siglo XX, nuevas teorías (*Relatividad Especial y General y Mecánica Cuántica*) han descubierto ciertas áreas alejadas de nuestra experiencia diaria en las que la Mecánica Clásica no es satisfactoria. Sin tener que recurrir a estas teorías podemos construir rascacielos y aviones, enviar naves al espacio y muchas otras cosas más. De todo esto trata la Mecánica Clásica.

Consideremos un cuerpo particular en movimiento. La experiencia prueba que la presencia de otros cuerpos de su entorno puede modificar su velocidad comunicándole una aceleración; se dice entonces que se ha producido una ***interacción*** sobre el citado cuerpo. La expresión cuantitativa de la interacción que sufre (esto es, su medida) es lo que denominamos ***fuerza***.

En la Naturaleza se conocen cuatro interacciones diferentes que reciben el nombre de ***fundamentales***:

- ***Gravitatoria***, es la más débil de todas aunque es la que rige el movimiento de los astros. La propiedad responsable de la misma es la masa de los cuerpos y su intensidad varía con el inverso del cuadrado de la distancia.
- ***Electromagnética***, es más intensa que la gravitatoria pero menos que las otras dos. Es una consecuencia de la naturaleza eléctrica de la materia, pues la propiedad que la causa es la carga eléctrica y también varía con el inverso del cuadrado de la distancia. Es la responsable de la estabilidad de los átomos y de la mayoría de los fenómenos que observamos en la Tierra. Por ejemplo, las fuerzas de rozamiento o la que ejerce un futbolista cuando golpea a un balón son de origen electromagnético.
- ***Nuclear débil***, tiene lugar sólo en el interior del átomo. Es la responsable de la emisión de radiación beta (electrones) por parte de núcleos atómicos radiactivos.
- ***Nuclear fuerte***, es la más intensa de todas. Garantiza la estabilidad de los núcleos atómicos, ya que actúa entre protones y neutrones manteniéndolos unidos.

El problema básico de la Mecánica es el siguiente:

- Se nos da un cuerpo cuyas características (masa, volumen, carga eléctrica, etc) conocemos.
- Situamos al cuerpo en una posición inicial conocida y con una velocidad inicial también conocida, en un entorno que interaccione con él del que tenemos una descripción completa.
- ¿Qué movimiento llevará el cuerpo?

Este problema fue resuelto por Isaac Newton (1642-1727) para una gran variedad de entornos cuando formuló las ***Leyes del Movimiento*** y la de la ***Gravitación Universal***.

Para resolver el problema necesitamos conocer las ***leyes de las fuerzas***; es decir, *relaciones que permiten calcular las fuerzas en función de las propiedades del cuerpo y del medio*. Una vez conocidas, la teoría de la Mecánica clásica permite determinar el movimiento del cuerpo.

Hay que subrayar que las leyes de Newton son sólo la base de la Dinámica. La teoría es amplia y compleja; en ella se definen muchas magnitudes (momento lineal, trabajo y energía cinética son algunos ejemplos) y se establecen relaciones entre ellas. En nuestro estudio nos conformaremos con conocer las magnitudes más importantes y, a partir de ellas y de sus relaciones, obtener información de los movimientos de cuerpos sometidos a fuerzas en casos muy sencillos.

En el estudio de la Dinámica, igual que en Cinemática*, consideramos a los cuerpos como partículas*, lo que significa que las fuerzas que actúan sobre un objeto particular se pueden localizar en un mismo punto. Al hacer esto estamos ignorando el posible movimiento de rotación, lo que supone una simplificación de su movimiento. Sin embargo, cuando el cuerpo no lleva asociado ningún movimiento de rotación o cuando sólo nos interesa su movimiento global, los resultados son satisfactorios.

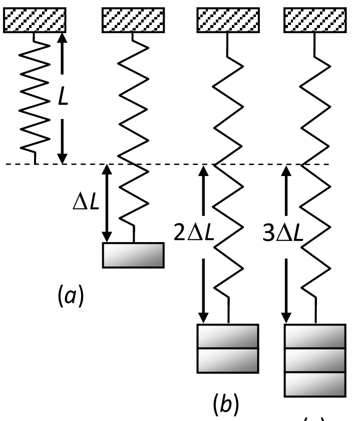
El concepto de partícula no es más que una aproximación simplificada de la realidad; esto es, un ***modelo*** útil que permite aplicar las leyes del movimiento de un modo sencillo y, de ese modo, construir una teoría.

2. Las fuerzas y su medida. Carácter vectorial de las fuerzas

El curso pasado se definió fuerza como *toda causa capaz de alterar el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo o de producir en él una deformación.*

Esto es coherente con el concepto de interacción, ya que modificar el estado de reposo o de movimiento es cambiar la velocidad y deformar un cuerpo, que suponemos en reposo, es hacer que unas partes del mismo se muevan respecto a otras. Sin embargo, la definición anterior no se puede considerar científica porque no indica cómo se mide la fuerza.

Para que la definición de una magnitud sea físicamente válida es necesario que indique directa o indirectamente la forma de medirla.
Las deformaciones que las fuerzas producen en los cuerpos elásticos, tales como muelles y resortes, nos van a permitir la medida de las mismas.



(*a*) (*b*) (*c*)

Si colgamos un cuerpo de un muelle, como refleja la figura (*a*), éste se alarga una cantidad ΔL como consecuencia de la fuerza F que el cuerpo ejerce sobre él. Colguemos a continuación dos cuerpos iguales al anterior y luego tres, tal como se ve en las figuras (*b*) y (*c*). Los resultados del experimento muestran que en el primer caso el muelle se estira una longitud $2\Delta L$ y en el segundo $3\Delta L$. Si, como parece razonable, la fuerza que ejercen los dos cuerpos es el doble que la de uno solo y la que ejercen los tres es triple, tenemos que,

$$\frac{F}{\Delta L}=\frac{\cancel{2}F}{\cancel{2}\Delta L}=\frac{\cancel{3}F}{\cancel{3}\Delta L}=\cdots=k$$

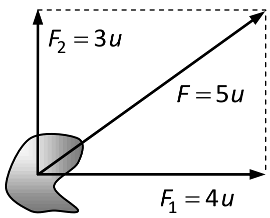
donde k es la constante de proporcionalidad[1] (distinta para cada muelle), que se conoce como *constante elástica*. Por lo tanto, concluimos que *la fuerza ejercida sobre el muelle es directamente proporcional a la deformación del mismo*, lo que se conoce como ley de Hooke[2]. Para expresarla matemáticamente solo hay despejar F de la ecuación anterior,

$$F = k\Delta L$$

La ley de Hooke permite medir fuerzas. En efecto, si ejercemos una fuerza sobre un muelle que lo alargue, por ejemplo, 1 *cm* y la elegimos como unidad, entonces una fuerza que lo estire 2 *cm* será el doble de la unidad, otra que lo haga 3 *cm* será el triple la unidad y así sucesivamente. Un muelle calibrado de este modo, como el de la figura, recibe el nombre de ***dinamómetro***.

Una forma válida de definir una magnitud es indicar directamente cómo se mide, lo que se denomina ***definición operacional***.
Puesto que los cuerpos elásticos permiten la medida directa de las fuerzas (asignando una fuerza unidad a una deformación específica) y hemos indicado cómo hacerlo; lo que hemos hecho ha sido dar una definición operacional de fuerza.

Las fuerzas son magnitudes cuyos sus efectos dependen de su ***intensidad***[3], dirección, sentido y punto de aplicación[4]; por lo tanto, en principio, se trata de una magnitud vectorial y podría representarse por un vector. Sin embargo, esto no es suficiente para considerarlas magnitudes vectoriales; es necesario además que cumplan la ley de la suma de vectores. Para saberlo hemos de recurrir al experimento: supongamos un cuerpo sometido a dos fuerzas perpendiculares $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ de intensidades 3 y 4 unidades, tal y como muestra la figura. Para que la fuerza pueda representarse por un vector, es necesario que la resultante de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ esté representada por el vector suma (ver figura); esto es, que tenga una intensidad de 5 *u* y que la orientación sea la indicada por el vector. El resultado de este experimento, y de otros muchos, muestra que esto es realmente así; por lo tanto, **las fuerzas son magnitudes vectoriales**.



3. Leyes de Newton

Como ya se ha mencionado, la Dinámica se fundamenta en tres principios fundamentales que reciben el nombre de ***leyes de Newton***, ya que fue Isaac Newton quien, en el siglo XVII, las formuló. La primera tiene que ver con los sistemas de referencia, la segunda relaciona las fuerzas con los movimientos y la tercera da cuenta de que las fuerzas actúan siempre por parejas.

---

[1] Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el cociente entre ambas es constante.

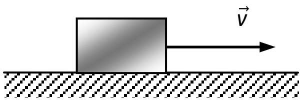
[2] La ley enunciada así es incompleta porque no indica el sentido de la fuerza. En el punto 5 enunciaremos la ley completa.

[3] Por lo general, la cantidad de una magnitud se suele denominar simplemente *magnitud*. Sin embargo, en el caso particular de las fuerzas esto no es así; la cantidad de una fuerza recibe el nombre de *intensidad*.

[4] En realidad recta de aplicación pues el efecto de una fuerza sobre un cuerpo es el mismo sea el sea su punto de aplicación, siempre que se ubique en la recta de aplicación de la fuerza. Por tanto, las fuerzas se representan por vectores deslizantes.

3.1. Primera: Ley de inercia

Se dice que un cuerpo está ***aislado*** cuando no está sometido a ninguna interacción. En la práctica es muy difícil que esto suceda, ya que la ***interacción gravitatoria*** siempre está presente en todos los cuerpos situados en la Tierra. Sin embargo, puede ocurrir que un cuerpo esté sometido a varias interacciones de modo que sus efectos se cancelen y, en la práctica, el objeto se comporte como si estuviera aislado. Un ejemplo sencillo es el de un cuerpo situado en un plano horizontal; la interacción gravitatoria es contrarrestada por la reacción del plano, lo que hace que podamos considerarlo aislado.



Supongamos un cuerpo en reposo en un plano horizontal sometido sólo a la interacción gravitatoria (peso) y a la reacción del plano, como se ve en la figura. Si ejercemos una fuerza sobre él (dándole un empujón, por ejemplo), el cuerpo se pone en movimiento rectilíneo con una determinada velocidad que poco a poco va disminuyendo hasta que se detiene completamente. Apoyados en experiencias de este tipo, la mayoría de los filósofos anteriores a Galileo y Newton pensaban que se necesita cierta influencia o "fuerza" para mantener el movimiento de un cuerpo. Creían que el estado "natural" de éste es el reposo y que, si se mueve, tiene que haber un agente externo que lo impulse de forma continua; en caso contrario, terminaría por detenerse.

Podemos probar de manera experimental la falsedad de las afirmaciones anteriores del siguiente modo: si repetimos el experimento haciendo que las superficies del plano y del cuerpo sean más lisas, veremos que éste recorre una distancia mayor antes de detenerse. Si ahora, además, utilizamos un lubricante observamos que la distancia alcanzada es todavía mayor. Finalmente, si las superficies se alisan más y se usa un lubricante mejor hallamos que la velocidad disminuye más lentamente y el cuerpo viaja más lejos antes de llegar al reposo.

De todos estos experimentos podemos concluir que debe haber una causa (denominada ***rozamiento***) que hace que el cuerpo se detenga y que disminuye a medida que se alisan las superficies y se añade lubricante. Podemos extrapolar los resultados y decir que, si pudiese eliminarse todo el rozamiento, el cuerpo continuaría en línea recta a velocidad constante indefinidamente. *Se necesita una fuerza para iniciar el movimiento de un cuerpo* (o sea, para acelerarlo), pero *no se requiere fuerza alguna para mantener el movimiento a velocidad constante*

Este principio fue adoptado por Newton como la primera de sus tres leyes del movimiento:

Cuando la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es cero, resulta que dicho cuerpo permanece en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme.

La tendencia de los cuerpos a permanecer en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme se denomina ***inercia***, por ello la primera ley de Newton también se llama ***Ley de inercia***.

La vida cotidiana nos muestra ejemplos que parecen contradecir esta ley. Imaginemos, por ejemplo, un pasajero que viaja a velocidad constante por una carretera rectilínea. Si la calzada es buena, tiene la impresión de estar en reposo ya que no se mueve respecto al coche; pero si, en un momento dado, el coche frena, (o acelera) bruscamente o entra en una curva cerrada, el pasajero siente una "fuerza" que lo lleva hacia delante (o atrás) o hacia un lado respectivamente. En todos los casos el pasajero ve modificado su estado de reposo sin que aparentemente se haya ejercido sobre él fuerza externa alguna que explique el fenómeno.

Fuerzas de inercia y sistemas de referencia

La explicación del fenómeno anterior es muy simple si consideramos un sistema de referencia ligado a la carretera. Un observador que perciba la situación desde la carretera tiene una impresión distinta. En efecto, para él, el pasajero se encontraba inicialmente en movimiento rectilíneo y uniforme, por lo que debería seguir así según el principio de inercia. Y esto es precisamente lo que ocurre cuando el coche frena, acelera o entra en la curva: el pasajero tiende a seguir como estaba; es decir, en movimiento rectilíneo y uniforme, por lo que dentro del coche se tienen las impresiones citadas anteriormente.

La "fuerza" que siente el pasajero es debida a la aceleración del sistema de referencia (tangencial, centrípeta o ambas) y no responden a ninguna interacción real; es decir, no son fuerzas reales. Se denominan ***fuerzas de inercia*** debido a que "violan" la primera ley de Newton.

El ejemplo anterior nos permite extraer una importante conclusión: *el Principio de Inercia solamente es válido en sistemas de referencia no acelerados*, que se conocen como ***sistemas de referencia inerciales***.

Notemos que cualquier sistema de referencia ligado a la Tierra no es inercial, ya que el planeta tiene un movimiento de rotación en torno a su eje que provoca una aceleración centrípeta a todos los cuerpos que se encuentran en su superficie. En realidad esta aceleración es lo suficientemente pequeña como para que en la mayoría de los problemas se puede considerar a la Tierra como un sistema de referencia inercial.

3.2. Segunda: Ley fundamental de la Dinámica

Uno de los efectos de las fuerzas es el de modificar el movimiento de los cuerpos; es decir, de provocar aceleraciones. La experiencia prueba que si a un mismo cuerpo se le aplican distintas fuerzas, la relación entre las intensidades de éstas y las aceleraciones producidas es siempre la misma; esto es,

$$\frac{F_1}{a_1}=\frac{F_2}{a_2}=\frac{F_3}{a_3}=\cdots=k \quad \Rightarrow \quad F_1=ka_1,\ F_2=ka_2,\ F_3=ka_3\ldots$$

donde F_1, F_2, F_3 ... son las fuerzas y a_1, a_2, a_3 ... las aceleraciones respectivas. La constante k, que se representa con la letra m, es distinta para cada cuerpo y recibe el nombre de ***masa inercial*** del cuerpo. En general, si designamos por F a la fuerza y por a a la aceleración, queda,

$$F=ma$$

Como la aceleración del cuerpo tiene la misma dirección y sentido que la fuerza ejercida, la relación anterior puede expresarse también en forma vectorial,

$$\vec{F}=m\vec{a}$$

En el caso de que existan varias fuerzas aplicadas al cuerpo, la aceleración que adquiere es la correspondiente a una única fuerza que, como ya sabemos, es igual a la suma vectorial de aquellas y que llamaremos ***fuerza resultante*** $(\vec{F}_R)$; es decir,

$$\boxed{\vec{F}_R = m\vec{a}}$$

que se recibe el nombre de ***ecuación fundamental de la Dinámica*** y es la expresión matemática de la 2ª ley. Se puede enunciar así:

Si sobre un cuerpo actúa una fuerza o varias de resultante no nula, adquiere una aceleración de la misma dirección y sentido que es directamente proporcional a la fuerza aplicada, siendo la masa del cuerpo la constante de proporcionalidad.

Masa. Unidad y medida

La masa es una propiedad de todos los cuerpos que se puede medir; es por lo tanto una magnitud física. El hecho de que dos cuerpos de masas m_1 y m_2 unidos se comporten mecánicamente igual que uno solo de masa $m = m_1 + m_2$ indica que la masa es una magnitud escalar.

Como ya se ha dicho, se trata de una magnitud fundamental[5]; es decir, su unidad se define de forma directa. La unidad de masa en el SI (denominada ***kilogramo patrón***, *kg*) es, por definición, *la que posee cierto cilindro de una aleación de platino e iridio que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en el museo de la Ciencia de Sèvres, cerca de París*.

La ecuación $F = ma$ permite medir la masa de cualquier cuerpo tomando como referencia el kilogramo patrón. En efecto, consideremos una copia del kilogramo patrón, cuya masa designaremos por m_0, y un segundo cuerpo arbitrario de masa m desconocida. Si aplicamos a ambos la misma fuerza, observamos que adquieren aceleraciones diferentes, que designaremos por a_0 y a respectivamente. Entonces,

$$F = ma = m_0 a_0$$

ya que la fuerza es la misma. Despejando m queda,

$$m = m_0 \frac{a_0}{a}$$

que da la medida de m en base a m_0. Por ejemplo, si la fuerza aplicada produce una aceleración de 2 m/s^2 al cuerpo patrón y 0,5 m/s^2 al otro, la masa de éste es,[6]

$$m = 1\,kg \frac{2}{0,5} = 4\,kg$$

Si nos fijamos en el ejemplo, observamos que el segundo cuerpo, que tiene una masa cuatro veces mayor que el patrón, adquiere una aceleración que es la cuarta parte; es decir, que presenta una oposición cuatro veces mayor a ser acelerado. Como la propiedad responsable de que los cuerpos tiendan a seguir en su estado de reposo o de movimiento es la inercia, *podemos considerar a la masa de un cuerpo como una medida de la inercia que presenta*.

[5] En mecánica se definen tres magnitudes fundamentales de las que derivan todas las demás. Una de ellas es la masa.

[6] En la práctica no se mide la masa de este modo. Una balanza de platillos iguales, por ejemplo, es un método alternativo mucho más cómodo.

Unidad de fuerza

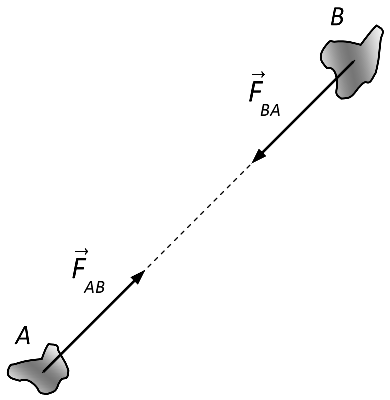
Una vez fijadas las unidades de la masa y de la aceleración, las unidades de fuerza quedan determinadas por la ecuación fundamental de la Dinámica. En el SI la masa se mide en *kg* y la aceleración en m/s^2, por lo que la unidad de fuerza tiene que ser el $kg{\cdot}m/s^2$ que recibe el nombre de ***Newton*** (*N*); esto es,

$$1N = 1kg \cdot 1m/s^2$$

Por lo tanto, un Newton es *la fuerza que hay que aplicar sobre la masa de* 1 *kg para que adquiera una aceleración de* 1 m/s^2.

3.3. Tercera: Ley de acción y reacción

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo tienen su origen en otros cuerpos que interaccionan con él. Cualquier fuerza aislada es sólo un aspecto parcial de una interacción mutua de, al menos, dos cuerpos. Experimentalmente se ha encontrado que cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, éste ejerce también una fuerza sobre el primero que es igual en intensidad y dirección, pero de sentido opuesto. De esto se deduce que es imposible que exista una fuerza aislada en la Naturaleza. Si a una de las dos fuerzas se la denomina *acción*, a la otra se la llamará *reacción*; los nombres de acción y reacción no implican una relación de causa y efecto, sino una interacción mutua simultánea (ver figura).



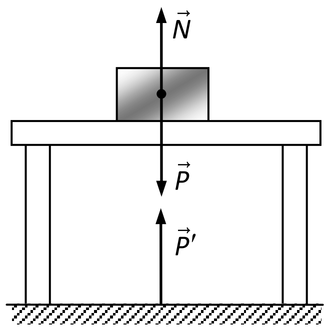
Esta propiedad de las fuerzas fue enunciada por Newton en su 3ª ley del movimiento y la podemos enunciar así:

Si un cuerpo A ejerce una fuerza $\vec{F}_{BA}$ *sobre otro B, entonces el cuerpo B ejerce una fuerza* $\vec{F}_{AB}$ *sobre A, que es igual y de sentido contrario a la anterior y está aplicada en la misma recta;* es decir,

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} \;\Rightarrow\; \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = 0$$

Por ejemplo, si dejamos en libertad un cuerpo a una cierta altura sobre el suelo, la Tierra ejerce sobre él una fuerza hacia abajo que es su peso y que hace caer al cuerpo. Por la ley de acción y reacción, el cuerpo ejerce sobre la Tierra una fuerza exactamente igual y de sentido contrario que la acelera hacia aquel. El hecho de que sea el cuerpo el que se mueve hacia la Tierra y no al revés se debe a que, de acuerdo con la 2ª ley, la aceleración de ésta es despreciable porque su masa es enorme (recuerda que aceleración es igual a fuerza dividida entre masa).

A simple vista da la impresión de que las fuerzas de acción y reacción deberían anularse y provocar el equilibrio de los cuerpos. Esto no sucede porque estas fuerzas actúan siempre sobre cuerpos distintos y, por lo tanto, ninguno de ellos estará en reposo, a menos que existan otras fuerzas que las anulen.



A menudo se confunden parejas de fuerzas con fuerzas de acción y reacción. Como esta cuestión es fuente de numerosos problemas, vamos a considerar un ejemplo práctico. La figura muestra un cuerpo apoyado en una mesa sobre el que actúan dos fuerzas distintas: el peso $(\vec{P})$ y la normal[7] $(\vec{N})$. Como el cuerpo permanece en reposo hay que concluir que las fuerzas se anulan, por lo que han de ser iguales y opuestas. A primera vista parece que son fuerzas de acción y reacción;

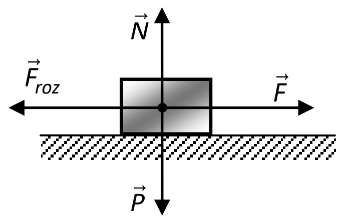
[7]Siempre que un cuerpo se apoya sobre una superficie, ésta ejerce sobre el cuerpo una fuerza perpendicular a la misma que recibe el nombre de ***fuerza normal***.

sin embargo no es así. La reacción del peso es la fuerza que el cuerpo ejerce sobre la Tierra ($\vec{P}'$), igual y opuesta, pero que actúa sobre un objeto distinto: la Tierra. La normal la ejerce la mesa sobre el cuerpo e impide que éste caiga al suelo; la reacción a esta fuerza es la que el cuerpo hace sobre la mesa (no dibujada en la figura)

4. Fuerzas de rozamiento

Hemos visto que un cuerpo que desliza sobre una superficie experimenta una fuerza en sentido contrario que termina por detenerlo. Se denomina ***fuerza de rozamiento o fricción*** ($\vec{F}_{roz}$).

Las fuerzas de rozamiento se deben a que las irregularidades de las superficies puestas en contacto encajan unas con otras y es necesaria una fuerza para poder "despegarlas".



Cuando a un cuerpo situado en un plano horizontal se le aplica una fuerza paralela al plano, como se ve en la figura, se observa que mientras la fuerza es menor que un cierto valor mínimo, el cuerpo no se mueve. Esto se debe a que, además de la fuerza aplicada, actúa la fuerza de rozamiento ($\vec{F}_{roz}$) en sentido opuesto, que la anula. Es evidente que mientras no hay movimiento se cumple que las intensidades de ambas fuerzas son iguales; esto es,

$$F = F_{roz} \text{ (si no hay movimiento)}$$

Cuando la fuerza aplicada supera un cierto valor umbral comienza el movimiento. La experiencia prueba que la fuerza mínima para iniciarlo cumple las propiedades:

a) Es independiente de las áreas de las superficies en contacto.
b) Es proporcional a la intensidad de la fuerza normal (N) que la superficie de apoyo ejerce sobre el cuerpo.
c) Depende del estado de pulimento de las superficies en contacto.

De acuerdo con el punto b) se deduce que $F_{min}/N = cte$, donde, conforme al punto c), el valor de la constante depende del estado de pulimento de las superficies. Recibe el nombre de ***coeficiente de rozamiento*** y se designa por la letra griega μ. Por lo tanto, la fuerza mínima es,

$$F_{min} = \mu N$$

Ahora bien, la fuerza mínima necesaria para iniciar el movimiento tiene que ser igual, en intensidad, a la que ejerce el rozamiento en sentido opuesto, por lo que,

$$\boxed{F_{roz} = \mu N}$$

cuando empieza el movimiento.

La experiencia demuestra que hay que hacer más fuerza para iniciar el movimiento del cuerpo que para mantenerlo. Esto indica que hay que distinguir dos coeficientes de rozamiento:

- ***Estático***, que actúa mientras no hay movimiento.
- ***Dinámico***, que actúa cuando hay movimiento.

En general, el coeficiente estático es ligeramente superior al dinámico.

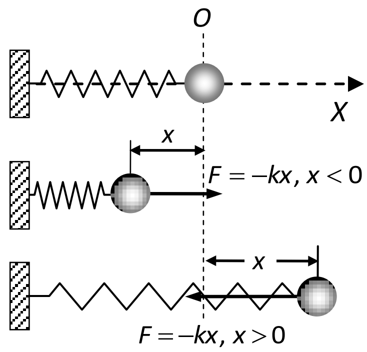
La expresión $F_{roz} = \mu N$, cuando se aplica a un cuerpo en reposo da el valor máximo de la fuerza de rozamiento estática; es decir, indica el valor mínimo de la fuerza que hay que hacer para vencer al rozamiento. Si el valor de la fuerza aplicada es menor que la necesaria, el cuerpo no se mueve y el valor del rozamiento se iguala a ella, anulándola. Si la expresión anterior se aplica a un cuerpo en movimiento, indica el valor de la fuerza (de rozamiento) que se opone al movimiento.

5. Fuerzas elásticas

Desde el punto de vista de la elasticidad los materiales se pueden clasificar en:

- ***Frágiles***, cuando se rompen al intentar deformarlos, como el vidrio.
- ***Plásticos***, No se rompen cuando se deforman, pero cuando cesa la acción deformadora no recuperan su forma original. La plastilina y el barro son dos ejemplos.
- ***Elásticos***, se deforman, como los plásticos, pero cuando cesa la acción deformadora recuperan su forma original. Los muelles (o resortes) y las gomas son ejemplos característicos. En todo cuerpo elástico existe una fuerza límite por encima de la cual se pierden las propiedades elásticas; recibe el nombre de límite de elasticidad.

La fuerza que ejerce un cuerpo elástico deformado sobre una masa *m* se denomina ***fuerza elástica***. Consideremos un cuerpo sometido a la fuerza elástica de un muelle, de modo que ésta actúa a lo largo del eje *OX* de un sistema de coordenadas y el cuerpo se encuentra en el origen *O* cuando el muelle está sin deformar (o sea, sin ejercer fuerza alguna), como se ve en la figura superior.



Observa que la fuerza y la posición del objeto respecto a *O* son magnitudes vectoriales. Sin embargo, puesto que ambas tienen siempre la dirección del eje *OX* (es decir, la dirección no cambia), se pueden expresar de forma escalar. En efecto, como la dirección ya está fijada, un número con signo (su coordenada, *x*) determina completamente la magnitud: el valor absoluto de *x* expresa la cantidad de magnitud y el signo el sentido en el que actúa.
Esto es aplicable a cualquier magnitud vectorial cuya dirección se mantenga constante.

La ley de Hooke establece que *la fuerza elástica es proporcional y de sentido contrario a la deformación del cuerpo que la ejerce*.
La expresión matemática de la ley en el caso ilustrado en la figura es,

$$\boxed{F=-kx}\ ^{(8)}$$

donde *x* es la cantidad que el muelle se deforma, con signo positivo si se alarga y con negativo si se encoge, y *k* es una constante de proporcionalidad que se conoce como ***constante elástica***; su unidad en el SI es el *N*/*m* y expresa la fuerza necesaria para desplazar al cuerpo una distancia unidad[9]. El signo menos se debe a que *F* tiene sentido opuesto al desplazamiento; pues $F > 0$ cuando el muelle se encoge, $x < 0$, (figura central) y $F < 0$ cuando se alarga, $x > 0$, (figura inferior).

Aplicando la 2ª ley de Newton a la fuerza elástica,

[8]Notemos que esta expresión es válida sólo si el cuerpo está en el origen *O* cuando el muelle se encuentra en su estado natural (ni encogido ni estirado). En este caso el alargamiento del muelle coincide con la distancia del cuerpo al origen *O*, esto es, con su coordenada *x*.

[9]Basta hacer $x = 1$ para comprobar que es así.

$$\left.\begin{array}{r} F=-kx \\ F=ma \end{array}\right\} \Rightarrow -kx=ma \Rightarrow a=-\frac{k}{m}x$$

donde $-k/m$ es una constante del movimiento que sólo depende del muelle y de la masa del cuerpo. Si definimos una nueva constante ω como,

$$\omega=\sqrt{k/m} \Rightarrow \omega^2=k/m$$

queda que, $a=-\omega^2 x$ donde $\omega^2=cte$

que es la ecuación de la aceleración del MAS.

Por lo tanto, concluimos que *una fuerza elástica origina un movimiento armónico simple*. Como el MAS es un movimiento periódico, *la fuerza elástica es periódica*.

Puesto que el periodo de un MAS es $T = 2\pi/\omega$, tenemos,

$$\left.\begin{array}{r} \omega^2=k/m \\ T=2\pi/\omega \Rightarrow \omega^2=4\pi^2/T^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

y finalmente, teniendo en cuenta esta ecuación y que la frecuencia de un MAS viene dada por $f = 1/T$, llegamos a,

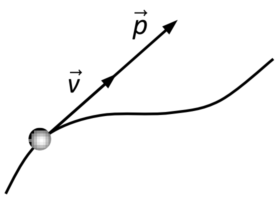
$$\boxed{f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Las ecuaciones expresan T y f en función de k y m y prueban que, para un muelle de constante elástica k dada, *el periodo y la frecuencia de oscilación dependen de la masa del cuerpo que realiza el MAS, pero no de la longitud del resorte ni de la amplitud de las oscilaciones.*

6. Momento lineal e impulso mecánico

*El **momento lineal** ($\vec{p}$)*[10] *de un cuerpo de masa m que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ es el producto de su masa por su velocidad*; es decir,

$$\vec{p}=m\vec{v}$$



De la definición se deduce que $\vec{p}$ es una magnitud vectorial que tiene la misma orientación que $\vec{v}$ (pues la masa es siempre positiva), como se ve en la figura. Su unidad en el SI es el *kg·m/s*.

El momento lineal permite escribir la 2ª ley de Newton de otra forma. En efecto, si calculamos la derivada del momento lineal respecto al tiempo tenemos, al considerarla como un cociente, que,

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}$$

Ahora bien, $d\left(m\vec{v}\right)$ representa la variación infinitesimal del momento lineal en el intervalo de tiempo (también infinitesimal) dt. Si en los instantes t y $t'=t+dt$ las velocidades respectivas son $\vec{v}$ y $\vec{v}'=\vec{v}+d\vec{v}$, tenemos, al ser m constante, que,

$$d\left(m\vec{v}\right)=m\vec{v}'-m\vec{v}=m\left(\vec{v}'-\vec{v}\right)=m\,d\vec{v}$$

Por lo tanto, tenemos, interpretando la derivada como un cociente, que,

[10] Esta magnitud la introdujo Newton y la llamó ***cantidad de movimiento***.

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}=\frac{m\,d\vec{v}}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

pero de acuerdo con la definición de la aceleración vectorial,

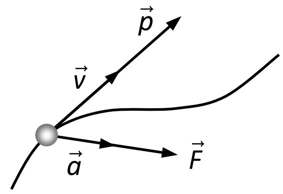
$$\vec{a}=d\vec{v}/dt$$

por lo que, sustituyendo en la ecuación anterior,

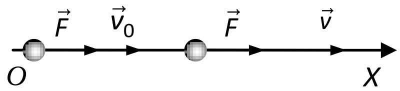
$$\frac{d\vec{p}}{dt}=m\vec{a}\ \Rightarrow\ \boxed{\vec{F}_R=\frac{d\vec{p}}{dt}}$$

que da la fuerza en función del momento lineal y es la forma en la que Newton formulo su 2ª ley.

Puesto que la derivada de una función respecto al tiempo mide la rapidez de su variación podemos afirmar que:
La fuerza resultante aplicada a un cuerpo en un instante particular es una medida de la rapidez con la que cambia el momento lineal del cuerpo en ese instante y tiene la dirección de la variación del momento ($d\vec{p}$), que es la de la aceleración, como se ve en la figura.



Consideremos ahora el caso particular de un cuerpo de masa *m* que se mueve en el eje *OX* de un sistema de coordenadas y que está sometida a una **fuerza constante** $\vec{F}$ que actúa en la dirección del eje *OX*. En el instante t_0 lleva una velocidad $\vec{v}_0$ y, debido a la fuerza, adquiere una aceleración $\vec{a}$, de modo que en un instante posterior *t* su velocidad es $\vec{v}$, como se aprecia en la figura.



Como el movimiento y la fuerza tienen la dirección del eje *OX*, podemos prescindir de su carácter vectorial y expresarlas en su forma escalar.

Al ser la fuerza constante, de acuerdo con la 2ª ley, la aceleración también lo es, así que el movimiento es uniformemente variado; entonces, en el intervalo de tiempo $\Delta t=t-t_0$ la velocidad varía en $\Delta v=v-v_0$ y tenemos que,

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v-v_0}{\Delta t}$$

que sustituyendo en la 2ª ley da,

$$F=m\frac{v-v_o}{\Delta t}\ \Rightarrow\ F\Delta t=mv-mv_o$$

El producto de la fuerza constante por el intervalo de tiempo que actúa recibe el nombre de ***Impulso mecánico*** (*I*),

$$\boxed{I=F\,\Delta t}$$

de donde se deduce que su unidad en el SI es el $N{\cdot}s$.

Representando por p_0 y p los momentos lineales de la partícula en los instantes t_0 y *t*, tenemos que,

$$\left.\begin{aligned}F\Delta t&=mv-mv_o\\ p_0=mv_0\ \ y\ \ p&=mv\end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ \boxed{I=p-p_o=\Delta p}$$

que expresa que *el impulso de una fuerza constante ejercida sobre un cuerpo que se mueve en la dirección de la fuerza se emplea en modificar su momento lineal.*

Si las **fuerzas no son constantes** las ecuaciones siguen siendo válidas si incluimos en ellas la fuerza media (F_{med}); esto es,

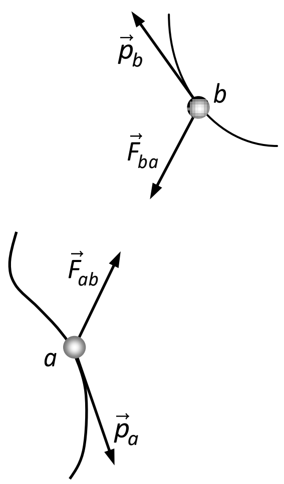
$$\boxed{I = F_{med}\Delta t = p - p_0 = \Delta p}$$

Esta ecuación resulta muy útil en los choques, en los que suelen actuar fuerzas variables muy intensas durante tiempos muy pequeños. Si un cuerpo sufre una colisión y se conoce el tiempo que dura, midiendo la velocidad antes y después de la misma podemos calcular la variación del momento lineal y, a partir de él, la fuerza media que ha actuado sobre el cuerpo.

En el caso más general de una fuerza que no tiene la dirección del movimiento, el impulso es una magnitud vectorial de la misma orientación que la fuerza, mientras que los momentos lineales en los instantes t_0 y t tienen direcciones diferentes. Sin embargo, las ecuaciones encontradas siguen siendo válidas, sólo que ahora son vectoriales; es decir, se cumple que,

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F}_m\Delta t = \vec{p} - \vec{p}_0 = \Delta\vec{p}}$$

7. Principio de conservación del momento lineal



Supongamos un sistema de dos cuerpos *a* y *b* que *interaccionan entre sí pero que no lo hacen con ningún otro objeto*[11], tal como indica la figura. De acuerdo con la 3ª ley de Newton, tenemos que,

$$\vec{F}_{ab} + \vec{F}_{ba} = 0$$

donde $\vec{F}_{ab}$ y $\vec{F}_{ba}$ son, respectivamente, la fuerza que *b* ejerce sobre *a* y la que *a* ejerce sobre *b*. Si los momentos lineales de *a* y *b* son, respectivamente, $\vec{p}_a$ y $\vec{p}_b$, tenemos, al aplicar la 2ª ley de Newton a cada cuerpo, que,

$$\vec{F}_{ab} = \frac{d\vec{p}_a}{dt} \text{ y } F_{ba} = \frac{d\vec{p}_b}{dt}$$

y sustituyendo las expresiones de las fuerzas en la 3ª ley, queda,

$$\frac{d\vec{p}_a}{dt} + \frac{d\vec{p}_b}{dt} = 0$$

donde $dt = t' - t$ representa el intervalo de tiempo infinitesimal que transcurre entre los instantes *t* y *t'*, mientras que $d\vec{p}_a = \vec{p}'_a - \vec{p}_a$ y $d\vec{p}_b = \vec{p}'_b - \vec{p}_b$ son las variaciones (infinitesimales) que experimentan los momentos lineales de *a* y *b* en el intervalo *dt*. Interpretando las derivadas de la última ecuación como cocientes, podemos expresarla también así,

$$\frac{\left(d\vec{p}_a + d\vec{p}_b\right)}{dt} = 0$$

y pasando *dt* al segundo miembro queda,

$$d\vec{p}_a + d\vec{p}_b = 0 \Rightarrow (\vec{p}'_a - \vec{p}_a) + (\vec{p}'_b - \vec{p}_b) = 0$$

por lo que, reorganizando la expresión anterior, se tiene,

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{p}'_a + \vec{p}'_b$$

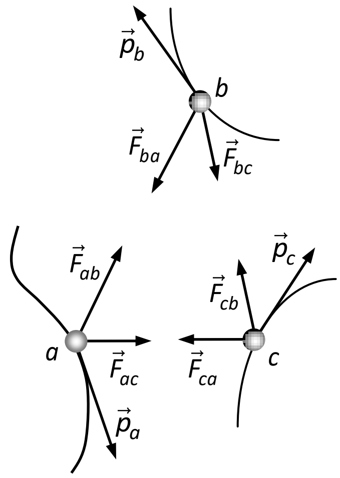
[11]Un sistema de cuerpos que interaccionan entre sí, pero que no lo hacen con ningún otro objeto que se encuentre fuera del sistema se denomina ***aislado***.

que expresa que la suma de los momentos lineales de los cuerpo ha permanecido constante en el intervalo de tiempo dt. Como dt es arbitrario, la suma de los momentos también se mantiene constante durante un intervalo dt' a continuación de dt y durante otro dt'' posterior a dt' y así sucesivamente; de modo que ha de permanecer constante en,

$$\Delta t = dt + dt' + dt'' + \ldots$$

donde Δt es un intervalo de tiempo finito, es decir, de cualquier tamaño. Hay que entender que se han podido modificar los momentos lineales de cada cuerpo, pero que su suma no ha variado. Esta importante relación recibe el nombre de ***conservación del momento lineal*** y también se puede escribir así,

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = cte$$



Este resultado se ha deducido para un sistema aislado de dos cuerpos. Sin embargo, es igualmente válido para cualquier sistema aislado de n cuerpos (la figura muestra un sistema de tres cuerpos y sus respectivas fuerzas). En el caso general de n cuerpos la ecuación se expresa como,

$$\boxed{\vec{p}_a + \vec{p}_b + \vec{p}_c + \ldots + \vec{p}_i + \ldots + \vec{p}_n = cte}$$

donde $\vec{p}_a$, $\vec{p}_b$, $\vec{p}_c \ldots$ son los momento lineales de las partículas a, b, $c \ldots$ Esta ley fundamental se puede enunciar así:

La suma de los momentos lineales de un sistema de partículas aislado permanece constante durante el movimiento.

A pesar de que el resultado se ha deducido de las leyes de Newton, es un principio más fundamental y más general que ellas. En realidad podíamos haber procedido a la inversa; es decir, derivar las leyes de Newton a partir de la conservación del momento lineal que, a su vez, se puede introducir como una ley experimental fundamental de la Naturaleza.

La conservación del momento lineal de un sistema aislado tiene una validez general; no se ha encontrado ningún fenómeno que la viole. Es tan importante y fundamental que se considera uno de los pilares[12] de la Física actual.

No ocurre lo mismo con las leyes de Newton. La de acción y reacción no tiene ni mucho menos validez general. Por ejemplo, cuando dos partículas cargadas eléctricamente y en movimiento relativo están lo suficientemente cerca, sufren una interacción electromagnética. En este caso las fuerzas de acción y reacción, aunque iguales y opuestas, no están aplicadas en la misma recta. En cuanto a la segunda ley, no siempre se puede aplicar. Por ejemplo, el concepto de fuerza carece de significado en el estudio de las partículas que constituyen el átomo.

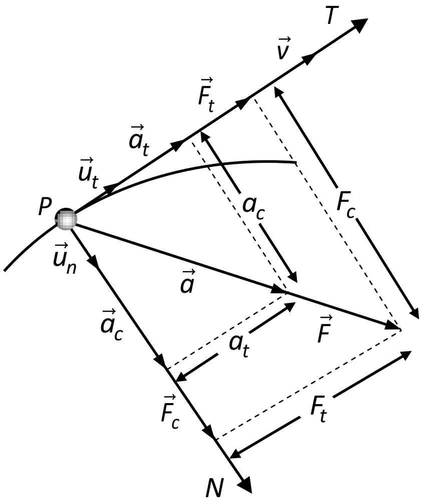
Sin embargo hay que destacar que las leyes de Newton son perfectamente aplicables a cuerpos "grandes" (del tamaño de una molécula o mayor) que se mueven a velocidades "pequeñas" (muy inferiores a la de la luz).

8. Dinámica del movimiento circular

Si la fuerza que actúa sobre un cuerpo y, por lo tanto, la aceleración tienen la mis-

[12]La Física actual se asienta en tres principios fundamentales: la conservación del momento lineal, la conservación del momento angular y la conservación de la energía.

ma dirección que la velocidad, el movimiento tiene lugar en línea recta. Como se vio en Cinemática, en el movimiento curvilíneo la aceleración y la velocidad tienen direcciones diferentes. Teniendo en cuenta que la aceleración la provoca la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo, podemos afirmar que, *para producir un movimiento curvilíneo la fuerza resultante debe formar un ángulo distinto de cero con la velocidad.*



Recordemos que la componente de la aceleración vectorial en la dirección de la velocidad (aceleración tangencial, a_t) es la responsable del cambio de la magnitud de la misma; mientras que su componente en la dirección perpendicular (aceleración normal o centrípeta, a_c) modifica la dirección de la velocidad. La figura muestra un pequeño cuerpo con movimiento curvilíneo sometido a una fuerza $\vec{F}$.

Al igual que la aceleración, la fuerza $\vec{F}$ también puede descomponerse en dos: una en la dirección tangencial ($\vec{F}_t$) y otra en la dirección normal ($\vec{F}_c$), como se aprecia en la figura, de la que se desprende que,

$$\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_c$$

designando por F_t y F_c, respectivamente, a las componentes (escalares) de la fuerza en las direcciones de dichos ejes, tenemos que,

$$\vec{F} = F_t\,\vec{u}_t + F_c\,\vec{u}_n$$

Comparando las dos ecuaciones anteriores concluimos que,

$$\vec{F}_t = F_t\vec{u}_t \quad \text{y} \quad \vec{F}_c = F_c\vec{u}_n$$

*donde la primera se denomina **fuerza tangencial** y la segunda **fuerza normal** o **centrípeta.***

Cada componente tiene un significado bien definido. Aplicando la ecuación fundamental de la Dinámica y expresándola en sus componentes tangencial y normal,

$$\vec{F} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \begin{cases} F_t = ma_t = m\,dv/dt \\ F_c = ma_c = mv^2/R \end{cases}$$

ya que, como se vio en Cinemática, $a_t = dv/dt$ (que mide la rapidez con la que varía la magnitud de la velocidad) y $a_c = v^2/R$[13] (que está relacionada con la rapidez con la que varía la dirección de la velocidad).

La ***fuerza tangencial*** modifica la magnitud de la velocidad. La ***fuerza normal o centrípeta*** modifica la dirección de la velocidad; es decir, hace que el movimiento sea curvo. La fuerza centrípeta apunta siempre hacia la concavidad de la curva, como se ve en la figura.

Cuando la fuerza tangencial es cero no hay aceleración tangencial y, por lo tanto, la magnitud de la velocidad es constante; lo que tiene como resultado un movimiento curvilíneo uniforme. Si la fuerza centrípeta es cero, no hay aceleración centrípeta por lo que la dirección de la velocidad no cambia y el movimiento es rectilíneo.

Uno de los movimientos curvilíneos más importante es sin duda el movimiento circular (MC). Es el más sencillo de estudiar porque el radio de curvatura es constante e igual al radio de la circunferencia. En el MC sabemos, por Cinemática, que,

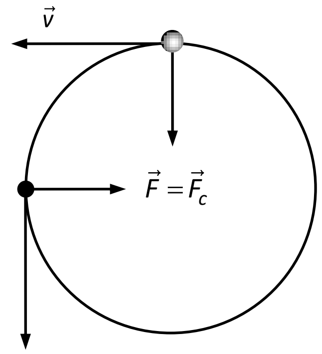
[13] Recordemos que R es el radio de curvatura en cada punto de la trayectoria y que en el movimiento circular coincide con el radio de la circunferencia.

$$v = \omega R$$

donde v es la magnitud de la velocidad vectorial[14], ω la velocidad angular y R el radio de la circunferencia. Por lo tanto, la aceleración centrípeta se puede expresar como,

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$$

Movimiento circular uniforme

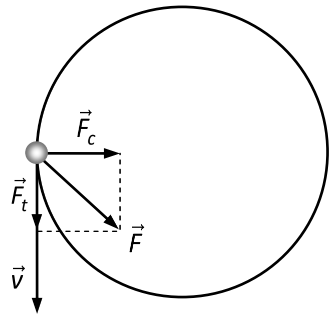


Al ser la magnitud de la velocidad constante, la fuerza tangencial es nula y la aceleración y la fuerza centrípetas son constantes; esto es,

$$F_t = 0 \text{ y } F_c = mv^2/R = cte$$

lo que significa que la velocidad varía constantemente de dirección de forma uniforme y que la fuerza aplicada al cuerpo (que coincide con la centrípeta) está dirigida en todo momento al centro de la circunferencia, como se ve en la figura.

Movimiento circular variado

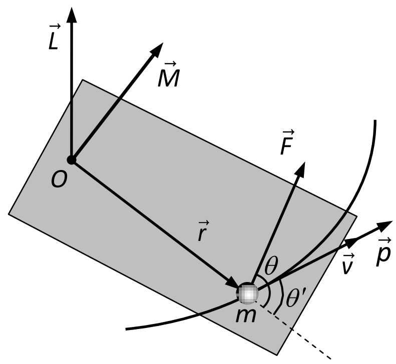


En este caso varía la magnitud de la velocidad, por lo que existe una aceleración tangencial. Asimismo, ya que $a_c = v^2/R$, al variar la magnitud de la velocidad también lo hacen la aceleración y la fuerza centrípetas. Como se refleja en la figura, la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo (cuyas componentes son F_t y F_c) está dirigida hacia la concavidad de la curva.

Un ejemplo de movimiento circular variado es el de un objeto que, atado a una cuerda, se le hace girar en un plano vertical. Mientras asciende, el peso hace que su movimiento sea decelerado y, cuando desciende, el propio peso lo acelera.

9. Momento de una fuerza y momento angular

La figura muestra un pequeño cuerpo de masa m que, en un instante t, se mueve respecto al punto O con una velocidad $\vec{v}$ sometido a una fuerza $\vec{F}$; siendo $\vec{r}$ el vector de posición del cuerpo respecto a O.



Se define el ***momento de la fuerza*** $(\vec{M})$ *respecto al punto O como el producto vectorial del vector de posición de la fuerza* $(\vec{r})$ *por la fuerza* $(\vec{F})$, o sea,

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Se trata pues de una magnitud vectorial. De acuerdo con la definición de producto vectorial, la magnitud de $\vec{M}$ es,

$$M = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = r\,F \sin\theta$$

donde θ es el ángulo formado por la prolongación de $\vec{r}$ y $\vec{F}$. Su dirección es perpendicular a $\vec{r}$ y a $\vec{F}$; esto es, al plano que contiene tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}$ y su sentido está determinado por la regla de la mano derecha

Se define *el **momento angular*** $(\vec{L})$ *del cuerpo respecto al punto O como el producto vectorial de su vector de posición* $(\vec{r})$ *por su momento lineal* ($\vec{p} = m\vec{v}$); o sea

[14]Siempre que el movimiento tenga lugar en el sentido elegido como positivo.

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

Al igual que $\vec{M}$, se trata de una magnitud vectorial cuya magnitud es,

$$L = \left|\vec{r} \times \vec{p}\right| = r\,mv\sin\theta'$$

donde θ' es el ángulo formado por la prolongación de $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Su dirección es perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$, y su sentido está fijado por la regla de la mano derecha.

El momento angular generalmente cambia en magnitud y en dirección conforme la partícula se mueve. Sin embargo,

para una partícula que se mueve en un plano que contiene al punto O, la dirección del momento angular permanece constante, perpendicular al plano, ya que $\vec{r}$ y $\vec{v}$ están en dicho plano.

9.1. Relación entre el momento de una fuerza y el momento angular

Existe una relación muy importante entre el momento de una fuerza y el momento angular, que es fundamental en el estudio de la Dinámica de rotación de los cuerpos sólidos. Vamos a deducir esta ecuación, pero antes necesitamos conocer un resultado relacionado con la variación del producto de dos magnitudes.

Sean dos magnitudes *x* e *y* cuyos valores iniciales son $x = 3$ e $y = 5$. Supongamos que sufren una modificación, de modo que $x' = 3{,}5$ e $y' = 5{,}4$. Estamos interesados en conocer la variación que ha sufrido el producto de ambas,

$$\Delta(x \cdot y) = x' \cdot y' - x \cdot y = 3{,}5 \times 5{,}4 - 3 \times 5 = 18{,}9 - 15 = 3{,}9$$

Hallemos también el valor de la expresión,

$$x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot y = x(y' - y) + (x' - x)y = 3 \times 0{,}4 + 0{,}5 \times 5 = 1{,}2 + 2{,}5 = 3{,}7$$

Como era de esperar, $\Delta(x \cdot y) \neq x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot y$

y el error relativo de la diferencia es,

$$\frac{3{,}9 - 3{,}7}{3{,}9} \times 100 = 5{,}13\%$$

Supongamos ahora que $x' = 3{,}01$ e $y' = 5{,}02$; y calculemos de nuevo,

$$\Delta(x \cdot y) = x' \cdot y' - x \cdot y = 3{,}01 \times 5{,}02 - 3 \times 5{,}0 = 15{,}1 - 15{,}0 = 0{,}10$$

$$x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot y = x(y' - y) + (x' - x) \cdot y = 3 \times 0{,}02 + 0{,}01 \times 5 = 0{,}06 + 0{,}05 = 0{,}11$$

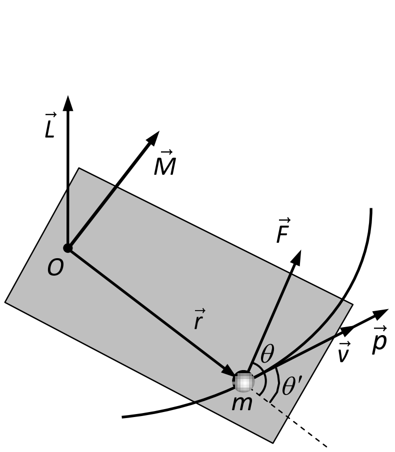
y el error relativo es, $\dfrac{0{,}11 - 0{,}10}{3{,}9} \times 100 = 0{,}256\%$

Si continuáramos el proceso veríamos que a medida que Δx y Δy se hacen menores, la diferencia entre $\Delta(x \cdot y)$ y $x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot y$ disminuye. En el límite, cuando Δx y Δy son infinitesimales, el valor de ambas expresiones coincide; es decir,

$$d(x \cdot y) = x \cdot dy + dx \cdot y$$

donde *d* representa una variación infinitesimal.

El resultado se cumple también con magnitudes vectoriales independientemente de que el producto sea escalar o vectorial.



Veamos ahora la relación entre $\vec{M}$ y $\vec{L}$. Sea de nuevo el cuerpo de masa *m* y velocidad $\vec{v}$ sometida a la fuerza neta $\vec{F}$ de la figura. La derivada de $\vec{L}$ respecto a *t* se puede expresar como,

$$\left.\begin{array}{r} d\vec{L}/dt \\ \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt}$$

donde $d\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)$ representa la variación infinitesimal que sufre el producto vectorial $\vec{r}\times\vec{p}$ en *dt*. Como hemos visto,

$$d\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)=\vec{r}\times d\vec{p}+d\vec{r}\times\vec{p}$$

por lo que, interpretando a la derivada como un cociente,

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)}{dt}=\frac{d\vec{r}\times\vec{p}+\vec{r}\times d\vec{p}}{dt}=\frac{d\vec{r}\times\vec{p}}{dt}+\frac{\vec{r}\times d\vec{p}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

Como $\vec{p}=m\vec{v}$ y $\vec{v}=d\vec{r}/dt$, el primer producto del segundo miembro es igual a,

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}=\vec{v}\times m\vec{v}$$

y puesto que $\vec{v}$ y $\vec{p}=m\vec{v}$ tienen la misma dirección, tenemos que,

$$\left|\vec{v}\times m\vec{v}\right|=v\,mv\sin 0=0\ \Rightarrow\ \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}=0$$

Por lo tanto queda que,

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

Veamos el segundo producto. Como $\vec{p}=m\vec{v}$, interpretando a la derivada como un cociente y recordando que $d\vec{p}=d\left(m\vec{v}\right)=md\vec{v}$, tenemos,

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{r}\times\frac{m\,d\vec{v}}{dt}=\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

pero como $d\vec{v}/dt=\vec{a}$ y $\vec{F}_R=m\vec{a}$, donde $\vec{F}$ es la fuerza aplicada al cuerpo,

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

que no es más que el momento de la fuerza $\vec{F}$ respecto al punto *O*; entonces,

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}&=\vec{r}\times\vec{F}\\ \vec{M}&=\vec{r}\times\vec{F}\end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ \boxed{\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}}$$

que es la relación que estábamos buscando.

De nuestros conocimientos de derivadas concluimos que el momento de la fuerza resultante aplicada a un cuerpo respecto a un punto *O*, en un instante dado, mide la rapidez del cambio del momento angular del cuerpo respecto a *O* en ese instante y tiene la dirección de su variación; es decir, de $d\vec{L}$.

Observa que las ecuaciones,

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}\ \text{ y }\ \vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

tienen la misma forma (son matemáticamente idénticas). La primera, como sabemos, es la ecuación fundamental de la Dinámica y describe el movimiento de traslación de los cuerpos. La segunda, que se deriva de la primera, recibe el nombre de ***ecuación fundamental de la Dinámica de Rotación*** porque describe el movimiento de rotación de los cuerpos, como el de una peonza por ejemplo.

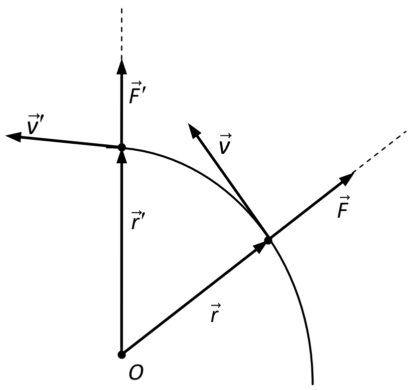
9.2. Conservación del momento angular. Fuerzas centrales.

Si un cuerpo está sometido a una fuerza y su momento, respecto a un punto dado, es cero, de acuerdo con la ecuación anterior tenemos,

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte}$$

Este resultado se conoce con el nombre de ***conservación del momento angular*** y se puede enunciar así:

El momento angular de un cuerpo respecto a un punto dado es constante (esto es, no cambia ni su magnitud ni su dirección) si el momento de la fuerza resultante aplicada al cuerpo, respecto al mismo punto, es nulo.



La condición $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ se cumple si $\vec{F} = 0$ pero también si $\vec{F}$ tiene la dirección de $\vec{r}$; en otras palabras, si la recta que contiene a $\vec{F}$ pasa en todo momento por el punto *O* (ver figura), pues, como hemos visto con $\vec{v} \times m\vec{v}$, el producto vectorial de dos vectores de la misma dirección es nulo.

Una fuerza cuya recta contenedora pasa siempre por un punto fijo en un sistema de referencia inercial se conoce como ***fuerza central*** (ver figura) *y el punto fijo se le llama* ***centro de fuerzas***.

Por lo tanto, cuando un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza central, el momento angular respecto al centro de fuerzas es una constante del movimiento.

Este resultado es importante porque las fuerzas que aparecen en muchos sistemas naturales son centrales. Por ejemplo, la Tierra se mueve alrededor del Sol bajo la influencia de una fuerza central cuya dirección siempre pasa por el centro del Sol; así que, el momento angular de la Tierra respecto al Sol tiene que permanecer constante. Las fuerzas elásticas y eléctricas también son centrales.

En el estudio del movimiento de planetas en torno al Sol tendremos ocasión de aplicar este importante resultado.