FÍSICA 2º DE BACHILLERATO

TEMA 5: ELECTROMAGNETISMO

1. Interacción eléctrica

- 1.1. Concepto de carga eléctrica. Ley de Coulomb.
  - 1.1.1. Fenómenos de electrización.
  - 1.1.2. Propiedades de la carga eléctrica. Unidad de carga.
  - 1.1.3. Unidad de carga eléctrica.
  - 1.1.4. Ley de Coulomb.
- 1.2. Campo eléctrico.
  - 1.2.1. Concepto.
  - 1.2.2. Campo eléctrico creado por una o varias cargas puntuales.
  - 1.2.3. Líneas de fuerza.
- 1.3. Estudio energético de la interacción eléctrica.
  - 1.3.1. Energía potencial eléctrica.
  - 1.3.2. Potencial eléctrico y diferencia de potencial.
  - 1.3.3. Superficies equipotenciales.
  - 1.3.4. Trabajo en una superficie equipotencial.
- 1.4. Relación entre el campo y el potencial.
  - 1.4.1. Obtención del potencial a partir del campo.
  - 1.4.2. Vector gradiente. Obtención del campo a partir del potencial.
  - 1.4.3. Relación entre el campo y el potencial en un campo eléctrico uniforme.
- 1.5. Movimientos de cargas puntuales en campos eléctricos.
  - 1.5.1. En campos creados por cargas puntuales.
  - 1.5.2. En campos uniformes.
- 1.6. Flujo del campo eléctrico. Teorema de Gauss.
  - 1.6.1. Flujo del campo eléctrico.
  - 1.6.2. Teorema de Gauss.
- 1.7. Aplicaciones de la ley de Gauss: Campos eléctricos creados por elementos continuos.
  - 1.7.1. Esfera.
  - 1.7.2. Hilo rectilíneo indefinido.
  - 1.7.3. Lámina plana indefinida.
- 1.8. Propiedades eléctricas de la materia: conductores y dieléctricos. Permitividad.
  - 1.8.1. Conductores y dieléctricos.
  - 1.8.2. Distribución de la carga en un conductor en equilibrio electrostático.
  - 1.8.3. Efecto jaula de Faraday y sus aplicaciones.
  - 1.8.4. Condensadores.
  - 1.8.5. Polarización de la materia.
- 1.9. Analogías y diferencias con el campo gravitatorio.

Autor: Luis A. Cordón Montón
Catedrático de Física y Química
IES “Sancho III el Mayor” (Tafalla)

1. INTERACCIÓN ELÉCTRICA

1.1. Concepto de carga eléctrica. Ley de Coulomb

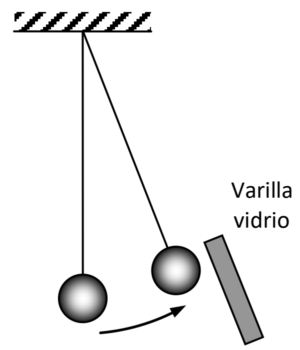
Algunos fenómenos eléctricos son conocidos desde la antigua Grecia. El filósofo griego Tales de Mileto (siglo VII a. C.) cita la propiedad que adquiere el ámbar (resina fosilizada) por frotamiento de atraer cuerpos ligeros como pajas o plumas.

La propiedad que adquiere el ámbar al ser frotado (y otros materiales, como el vidrio por ejemplo) se denomina ***electricidad*** y da lugar a una interacción llamada ***eléctrica*** que es una de las interacciones básicas de la Naturaleza.

Mientras que la interacción gravitatoria siempre es de atracción, la eléctrica puede ser de atracción o de repulsión. La mayoría de los cuerpos parecen no tener electricidad; por lo que, como resultado de un efecto acumulativo de masa, la interacción dominante parece ser la gravitatoria, aunque es mucho más débil. Sin embargo, es la fuerza eléctrica la que mantiene a los electrones en los átomos, a los átomos juntos en las moléculas y a las moléculas unidas en una sustancia. Así, los cuerpos materiales, y por extensión los organismos vivos, existen debido a la interacción eléctrica.

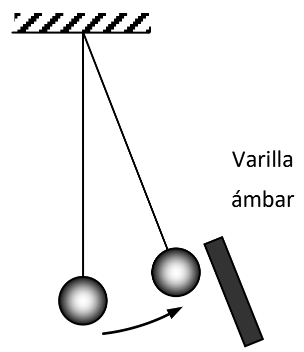
En este capítulo vamos a considerar la interacción eléctrica entre partículas cargadas **en reposo** en el sistema de referencia inercial del observador o moviéndose con una velocidad muy pequeña. Tal interacción se denomina ***electrostática***.

1.1.1. Fenómenos de electrización



Supongamos que colocamos una varilla de vidrio electrizada (al ser frotada con seda) cerca de una pequeña bola de corcho que cuelga de un hilo. La figura muestra que la varilla atrae al corcho. Si repetimos el experimento con una varilla de ámbar electrizada (al ser frotada con un paño), observamos el mismo efecto de atracción sobre la bola.

Si tocamos dos bolas de corcho con la varilla de vidrio electrizada, la experiencia prueba que adquieren electricidad. Podemos suponer que ambas bolas adquieren la misma electrización. Si las acercamos, notamos que se repelen. Se consigue el mismo resultado cuando tocamos las bolas con la varilla de ámbar electrizada. Sin embargo, si tocamos una bola con la varilla electrizada de vidrio y la otra con la de ámbar, de manera que una adquiera una electrización como la del vidrio y la otra como la del ámbar, observamos que las bolas se atraen. Llegamos a la conclusión de que existen dos tipos de electrización: una como la del vidrio y la otra como la del ámbar. Podemos denominar a la primera ***positiva*** y a la otra ***negativa*** (por supuesto, pudimos haber hecho la designación contraria).



La ley fundamental de la interacción eléctrica se puede formular así: *dos cuerpos con el mismo tipo de electrización (positiva o negativa) se repelen, pero si tienen tipos distintos de electrización (una positiva y la otra negativa), se atraen entre sí*.

La experiencia demuestra que las dos clases de electricidad contrarrestan sus efectos.

La medida de la electricidad de un cuerpo se denomina ***carga eléctrica*** (positiva o negativa).

La carga eléctrica y la masa son dos propiedades fundamentales que caracterizan la materia.

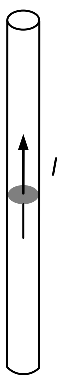
Hoy día se sabe que la materia se compone de átomos y éstos de protones, electrones y neutrones; de modo que los electrones tienen carga negativa y giran alrededor de los protones, que tienen carga positiva, y neutrones que carecen de carga. La mayoría de los cuerpos tienen el mismo número de electrones que de protones, siendo, por tanto, neutros. Al frotar el vidrio con seda se le arrancan electrones y queda cargado positivamente; al contrario, cuando se frota el ámbar con un paño, se le ceden electrones y queda cargado negativamente.

1.1.2. Propiedades de la carga eléctrica. Unidad de carga eléctrica

Las propiedades más importantes de las cargas eléctricas son:

- Se presenta en la Naturaleza bajo dos formas distintas. A la que adquiere el vidrio al ser frotado con seda se la denominó arbitrariamente *positiva* (+) y *negativa* (–) a la que presenta el ámbar cuando se le pasa un paño.
- La carga de un cuerpo es la suma algebraica de las cargas de sus partículas constituyentes. Si tiene igual cantidad de carga de cada tipo, el cuerpo es *neutro* y su carga eléctrica *neta* es nula.
- Las cargas del mismo signo se repelen y las de distinto signo se atraen.
- En un sistema aislado (sistema en el que no puede entrar ni salir carga) la carga neta permanece constante. Esta es una de las leyes fundamentales de la Naturaleza que recibe el nombre de *Principio de conservación de la carga eléctrica.*
- La carga eléctrica es una magnitud *cuantizada*; es decir, no varía de forma continua, sino “a saltos”. La carga neta de un cuerpo es siempre un múltiplo entero de la *carga elemental*, que es la del electrón.

1.1.3. Unidad de carga eléctrica



La unidad de carga eléctrica en el SI es el ***culombio*** (*C*). Sin embargo el culombio no es, como parecería razonable, una unidad fundamental del Sistema Internacional de unidades. La unidad fundamental, de la que deriva el culombio, es el *amperio* (*A*)[1]. La razón es que es mucho más fácil medir intensidades con precisión que medir cargas.

La intensidad de corriente en un conductor (ver figura) se define como *la cantidad de carga que pasa por una sección transversal del mismo por unidad de tiempo*. Así pues, en el caso particular de que la cantidad de carga (Δq) sea proporcional al tiempo (Δt), la intensidad (I) es constante y su valor es $I = \Delta q/\Delta t$.

De acuerdo con la ecuación, la carga que pasa en un intervalo de tiempo Δt por una sección de un conductor por el que circula una intensidad I es,

$$\Delta q = I\,\Delta t$$

[1]Recuerda que el amperio es la unidad de la *intensidad de corriente eléctrica*. Estableceremos su definición en la segunda parte del tema.

La unidad de carga en el SI (el culombio) se obtiene al sustituir I y t por sus respectivas unidades (1 A y $1\ s$); entonces,

$$1C = 1A \times 1s$$

es decir, *un culombio es la cantidad de carga que atraviesa cada segundo una sección de un conductor por el que circula una corriente constante de un amperio.*

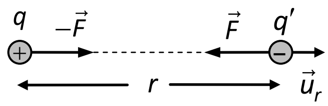
1.1.4. Ley de Coulomb

La fuerza originada por la interacción electrostática viene expresada por **la ley de Coulomb**, llamada así en honor a Charles A. de Coulomb (1736-1806), que se puede enunciar del siguiente modo:

La interacción eléctrica entre dos partículas con cargas q y q' situadas a una distancia r en reposo, o con movimiento relativo muy lento, es directamente proporcional a sus cargas y al inverso del cuadrado de la distancia entre ellas, y su dirección se halla a lo largo de la línea que une a las dos cargas.

La ecuación matemática que expresa la intensidad de la fuerza de la ley de Coulomb es,

$$F = k\frac{|q||q'|}{r^2} \quad (1)$$



Si tenemos en cuenta que la fuerza es una magnitud vectorial y que tiene la dirección de la recta que une las partículas, podemos expresar vectorialmente la ley, para la fuerza que q ejerce sobre q', como,

$$\boxed{\vec{F} = k\frac{qq'}{r^2}\vec{u}_r}$$

donde $\vec{u}_r$ es un vector unitario en la dirección de la recta que une las cargas y de sentido el que va de q a q'. Si una de las cargas es negativa y la otra positiva, la fuerza es de atracción; entonces el signo del segundo miembro de la ecuación es negativo y el sentido de la fuerza es opuesto al de $\vec{u}_r$ Si las dos cargas son positivas o negativas, la fuerza es de repulsión; entonces el signo del segundo miembro es positivo y el sentido de la fuerza es el mismo que el de $\vec{u}_r$.

De la ley de Coulomb se deduce que la fuerza eléctrica es central y formalmente idéntica a la gravitatoria, aunque ésta sólo puede ser atractiva. Ambas son proporcionales al inverso de la distancia al cuadrado y directamente proporcionales al producto de una propiedad de la materia (carga, masa).

Como en el caso gravitatorio, la ley de Coulomb es aplicable cuando los cuerpos cargados son esferas cuya carga está uniformemente repartida en ellas (en su volumen o en su superficie).

La constante de proporcionalidad (k) que aparece en la ley depende del medio material en el que se encuentren las cargas; en el vacío su valor es máximo. Por razones prácticas y de cálculo resulta más conveniente expresar k como,

$$k = 1/4\pi\varepsilon$$

donde ε es una nueva constante llamada ***constante dieléctrica*** o ***permitividad*** del medio; en el vacío se representa por ε_0.

El valor de *k* en el aire es aproximadamente igual al del vacío, por lo que $\varepsilon_{aire} = \varepsilon_0$. En adelante, mientras no se diga lo contrario, supondremos que el medio es el vacío o el aire.

La definición de amperio, de la que se deriva el culombio, hace que el valor de la constante *k* en el vacío sea,

$$k_0 = 10^{-7} c^2 = 8{,}9876 \cdot 10^9 \simeq 9 \cdot 10^9 \ N \cdot m^2 \cdot C^{-2}$$

donde $c = 2{,}9979 \cdot 10^8 \ m/s$ es la velocidad de la luz en el vacío. Entonces,

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_0} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7} c^2} = \frac{10^7}{4\pi c^2} \ C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$$

Esta opción hace más fácil escribir otras expresiones relacionadas con las ondas electromagnéticas. Por razones prácticas de cálculo, en adelante fijaremos el valor de k_0 igual a $9{\cdot}10^9$.

De acuerdo con la ecuación (1), si colocamos dos cargas idénticas de 1 *C* en el vacío separadas una distancia de 1 *m*, la fuerza entre ellas es,

$$F = k_0 \frac{|q||q'|}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{1 \times 1}{1^2} = 9 \cdot 10^9 \ N$$

es decir, dos cargas de un culombio separadas un metro en el vacío se ejercen una fuerza $9{\cdot}10^9$ *N*.

1.2. Campo eléctrico

1.2.1. Concepto

La interacción eléctrica, lo mismo que la gravitatoria, puede ser interpretada introduciendo el concepto de ***campo eléctrico***. Si se tiene un cuerpo cargado eléctricamente, podemos suponer que, de alguna manera, modifica la estructura del espacio en el que se manifiesta la fuerza que ejerce sobre otras cargas, creando un campo eléctrico que actúa sobre cualquier partícula cargada colocada en él y ejerciendo sobre ella una fuerza. De acuerdo con esta teoría, no es el cuerpo que crea el campo el que ejerce directamente la fuerza. *El cuerpo cargado crea el campo y éste ejerce la fuerza sobre la carga*.

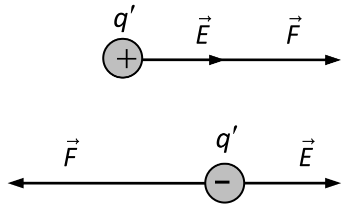
Si tenemos un campo eléctrico en una región del espacio y colocamos en uno cualquiera de sus puntos una partícula cargada, ésta se ve sometida a una fuerza eléctrica. A cada punto del campo le podemos asociar una magnitud vectorial que exprese la fuerza que en dicho punto ejerce el campo sobre la unidad de carga positiva colocada en él, que recibe el nombre de ***intensidad del campo*** $(\vec{E})$ en el punto. Si la carga es *q'* y la fuerza que ejerce el campo es $\vec{F}$, tenemos que,

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'}}$$

esto es así porque, de acuerdo con la ley de Coulomb, fuerza y carga son directamente proporcionales[2]. De la ecuación se deduce que $\vec{F}$ y $\vec{E}$ tienen la misma

[2]Para una *r* fija, $\vec{F}/q' = cte$ por lo que $\vec{F}$ y *q'* son proporcionales; entonces, despejando la fuerza

dirección, mientras que sus sentidos son iguales si $q' > 0$ y opuestos si $q' < 0$, como ilustran las figuras. Asimismo se desprende que en el SI la unidad de la intensidad del campo es el *N/C*, ya que la fuerza se mide en *N* y la carga en *C*.



La intensidad del campo eléctrico está definida en todos los puntos donde se manifiestan los efectos eléctricos y sólo depende, en cada punto, del cuerpo que crea el campo y de la posición del punto respecto a éste. Como en el caso del campo gravitatorio, el campo eléctrico es un ejemplo de campo vectorial, que queda completamente descrito cuando se conoce su intensidad en todos sus puntos; es decir, cuando se conoce la ecuación que expresa la intensidad en función de la posición; o sea, $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$.

El campo eléctrico, como el gravitatorio, cumple el **principio de superposición**, que dice que *el campo creado por un cuerpo cargado en un punto es independiente de la presencia de otros posibles cuerpos cargados.* De aquí se deduce que la intensidad en un punto de un campo creado por varios cuerpos cargados es la suma vectorial de las intensidades de los campos creados por cada uno de ellos,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n = \sum_i \vec{E}_i$$

donde $\vec{E}_i$ es el campo de la carga q_i y $\vec{E}$ el campo total.

1.2.2. Campo eléctrico creado por una o varias cargas puntuales

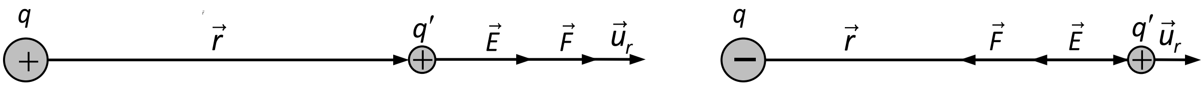
Si se tiene un campo creado por una carga puntual q y se coloca en un punto del mismo, a una distancia r, otra carga puntual de prueba q', la fuerza que actúa sobre ésta es,

$$\vec{F} = k\frac{q\,q'}{r^2}\vec{u}_r$$

por lo que, de acuerdo con la ecuación $\vec{E} = \vec{F}/q'$, el campo eléctrico en el punto en el que se encuentra q' es igual a,

$$\boxed{\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\vec{u}_r}$$

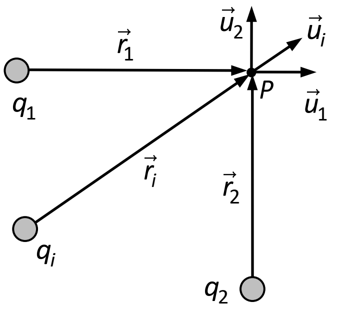
donde $\vec{u}_r$ es un vector unitario en la dirección de la recta que une las cargas y de sentido el que va de q a q'. La ecuación indica que la dirección de $\vec{E}$ es la de $\vec{u}_r$ y que el sentido depende del signo de q pero no de la carga prueba q'. Como se muestra en la figura, el sentido de $\vec{E}$ coincide con el de $\vec{u}_r$ si q es positiva y tiene sentido opuesto si q es negativa.



La ecuación obtenida es válida para cargas puntuales y para cuerpos esféricos con su carga distribuida uniformemente en su volumen o en su superficie (sólo para puntos exteriores al cuerpo).

---

queda que $\vec{F} = \overrightarrow{cte} \cdot q'$. Haciendo $q' = +1$ tenemos $\vec{F} = \overrightarrow{cte}$, por lo que la constante expresa la fuerza que el campo ejerce en un punto sobre la unidad de carga positiva; o sea, la intensidad del campo eléctrico en ese punto.



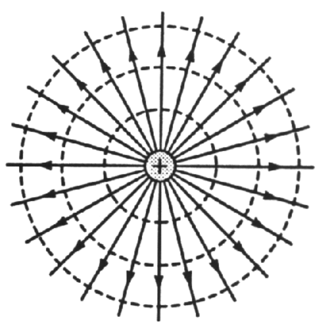
El campo eléctrico cumple el ***principio de superposición***, lo que significa que si el campo está creado por varias cargas puntuales q_1, q_2, q_3 ..., la intensidad en un punto *P* es la suma vectorial de las intensidades de los campos creados por cada carga; esto es,

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n=k\frac{q_1}{r_1^2}\vec{u}_1+k\frac{q_2}{r_2^2}\vec{u}_2+\cdots+k\frac{q_n}{r_n^2}\vec{u}_n=\sum_i k\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$$

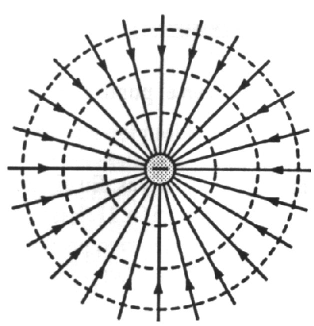
donde r_i es la distancia de q_i al punto *P* y $\vec{u}_i$ un vector unitario de la misma dirección y sentido que el vector de posición de *P* respecto a q_i, como indica la figura.

1.2.3. Líneas de fuerza

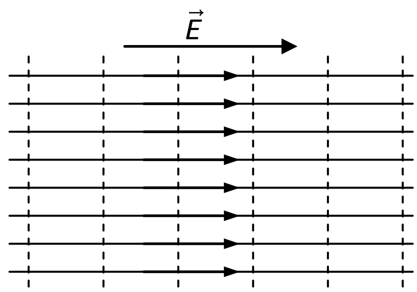
Como en el caso del campo gravitatorio, el campo eléctrico se representa gráficamente por medio de líneas de fuerza que, como sabemos, son tangentes en cada punto al vector que representa la intensidad del campo en ese punto y están orientadas de modo que indican el sentido del campo. Estas líneas se dibujan de modo que su densidad[3] en cada punto coincida (o sea proporcional) al valor del campo en ese punto. El hecho de que las fuerzas gravitatoria y eléctrica sean formalmente idénticas significa que las líneas de fuerza de ambos campos son iguales (radiales en el caso de un campo creado por una masa o carga puntual), con la única diferencia de que en el caso del campo eléctrico pueden estar orientadas hacia el cuerpo que crea el campo (cuando su carga es negativa) o en sentido opuesto (si su carga es positiva). En la figuras se han dibujado las líneas[4] de fuerza de varios campos eléctricos; entre ellos destaca por su importancia el denominado ***dipolo eléctrico*** (figura *e* de la página siguiente), formado por dos cargas iguales y opuestas separadas una distancia conveniente. Su importancia radica en que las llamadas ***moléculas dipolares*** presentan, a escala atómica, campos eléctricos de este tipo, el ácido clorhídrico y, sobre todo, el agua son ejemplos importantes de estas moléculas. La figura *c* muestra un campo eléctrico representado por líneas paralelas igualmente espaciadas; esto es, un campo constante, ya que, al ser las líneas de fuerza paralelas, el campo tiene siempre la misma dirección y, al tener una separación uniforme, la densidad es la misma en todos los puntos, lo que significa que la magnitud del campo también es constante.



a) Carga puntual positiva



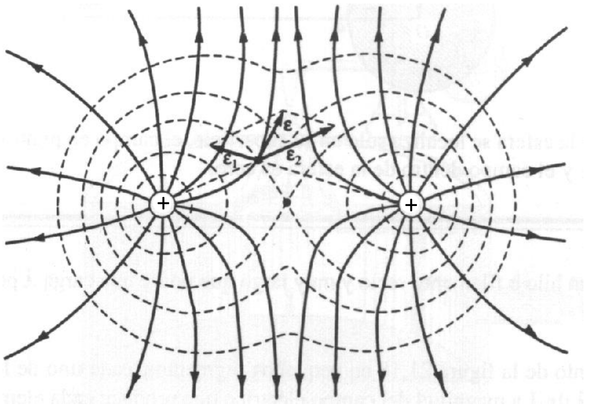
b) Carga puntual negativa



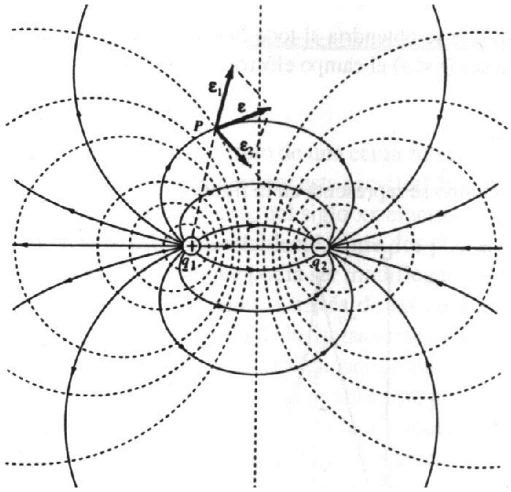
c) Campo constante

[3] La densidad en un punto se define como el número de líneas por unidad de superficie colocada en ese punto perpendicularmente al campo.

[4] Las líneas discontinuas (que en realidad son superficies) son las superficies equipotenciales, que veremos cuando abordemos el estudio del potencial eléctrico.



d) Cargas positivas iguales



e) Dipolo eléctrico

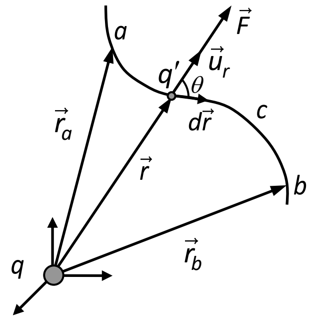
1.3. Estudio energético de la interacción eléctrica

En este punto vamos a estudiar la energía asociada a la interacción eléctrica.

1.3.1. Energía potencial eléctrica

El campo eléctrico, igual que el gravitatorio, es central y la intensidad de la fuerza entre partículas depende de la distancia entre ellas, por lo que también es conservativo (es decir, el trabajo que realiza el campo no depende del camino). En consecuencia, a la fuerza eléctrica (como a la gravitatoria) se le puede asociar una ***energía potencial eléctrica*** tal que el trabajo que realiza dicha fuerza sobre una carga que se mueve desde un punto *a* otro *b,* por cualquier camino *C* en el interior de un campo eléctrico, sea igual la diferencia de valores que toma la función energía potencial entre el punto inicial *a* y el final *b*; esto es,

$$W_a^b = E_p(a) - E_p(b) \quad (2)$$



Sea una carga puntual *q'* a la que "obligamos" a moverse a través de una trayectoria cualquiera *C*[5] en el interior de un **campo eléctrico creado por otra carga puntual *q*, que suponemos fija** (ver figura). Como vimos en el tema 1, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica sobre *q* cuando ésta se desplaza de *a* a *b* es,

$$W_a^b = \int_{a,c}^{b} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ se puede interpretar como el trabajo elemental realizado por $\vec{F}$ cuando *q'* está en el punto cuyo vector de posición es $\vec{r}$ y efectúa un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$. Ahora bien, como el trabajo no depende de la trayectoria, podemos quitar *C* de la integral; entonces,

$$W_a^b = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3)$$

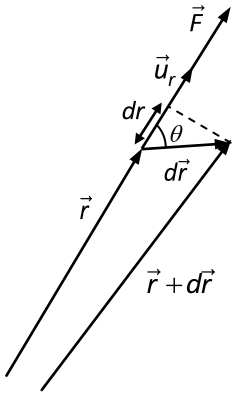
Combinando las ecuaciones (2) y (3) llegamos a,

$$W_a^b = E_p(a) - E_p(b) = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b k \frac{q\,q'}{r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{r}$$

[5] Podemos obligarla introduciéndola en un tubo hueco fijo cuya forma sea la de la trayectoria C.

ya que la fuerza eléctrica que q ejerce sobre q' es,

$$\vec{F} = k\frac{q\,q'}{r^2}\vec{u}_r$$



De acuerdo con la figura (que muestra el detalle ampliado de la figura anterior) y recordando la definición de producto escalar, tenemos que,

$$\vec{u}_r \cdot d\vec{r} = |\vec{u}_r||d\vec{r}|\cos\theta = |d\vec{r}|\cos\theta = dr$$

ya que $|\vec{u}_r| = 1$ por ser el módulo de un vector unitario. Vemos en la figura que dr es la componente (escalar) de $d\vec{r}$ en la dirección de $\vec{r}$ y que mide la variación que experimenta la magnitud del vector de posición $\vec{r}$ cuando la partícula efectúa el desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$. Por lo tanto, la integral anterior la podemos expresar como,

$$\int_a^b k\frac{q\,q'}{r^2}dr$$

que es una integral simple. Como k, q y q' son constantes, salen fuera y queda que la diferencia de energía potencial es igual a,

$$E_p(a) - E_p(b) = kqq'\int_a^b \frac{1}{r^2}dr$$

La primitiva de la función $1/r^2$ es $-1/r$; por lo tanto,

$$E_p(a) - E_p(b) = kqq'\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = k\frac{q\,q'}{-r_b} - \left(k\frac{q\,q'}{-r_a}\right)$$

que, ordenando convenientemente, da,

$$E_p(a) - E_p(b) = k\frac{q\,q'}{r_a} - \left(k\frac{q\,q'}{r_b}\right) = kqq'\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

que, como vemos, no depende de la trayectoria seguida, sino que sólo es función de las posiciones inicial y final.

Recordemos que la energía potencial asociada a una partícula en un punto dado no está definida, ya que si sumamos a los dos términos del segundo miembro de la ecuación anterior una constante arbitraria, la expresión queda igual porque la constante se cancela; es decir,

$$W_a^b = \left[E_p(a) + C\right] - \left[E_p(b) + C\right] = E_p(a) - E_p(b) = -\Delta E_p \quad (4)$$

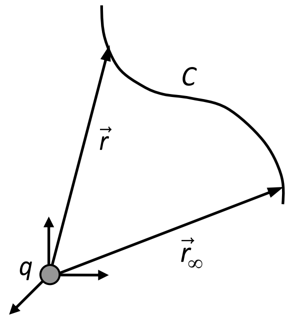
Debido a esta arbitrariedad podemos dar a C el valor que haga que la energía sea cero en el punto que más convenga. Este punto se toma como referencia (nivel cero) para medir las energías potenciales en los demás puntos.

Habida cuenta de que, como sucedía el campo gravitatorio, la fuerza eléctrica que q ejerce sobre q' es nula cuando $r = \infty$, elegimos el infinito como referencia, asignando el valor nulo a la energía potencial de toda partícula situada en él; o sea,

$$E_p(\infty) = 0 \quad \text{(por convenio)}$$

En la práctica, cualquier punto lo suficientemente alejado del cuerpo que crea el campo tal que la interacción eléctrica en él la podamos considerar despreciable, puede ser tomado como referencia. De estos puntos se dice que están fuera del campo.

De acuerdo con lo expuesto, el trabajo realizado por el campo cuando q' se traslada desde un punto cuyo vector de posición es $\vec{r}$ hasta otro que está fuera del campo (ver figura) es,



$$W_r^\infty = E_p(\vec{r}) - E_p(\infty) = k\frac{qq'}{r} - \left(k\frac{qq'}{\infty}\right)$$

como $kqq'/\infty = 0$ y $E_p(\infty) = 0$ por convenio, queda que,

$$\boxed{W_r^\infty = E_p(\vec{r}) = k\frac{qq'}{r} \text{ con } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}}$$

que es la expresión de la energía potencial asociada a una partícula de carga q' en el interior de un campo eléctrico creado por otra partícula de carga q. Igual que en el campo gravitatorio, *la energía potencial eléctrica de una carga q' en un punto expresa el trabajo realizado por el campo cuando q' se desplaza desde dicho punto hasta otro que está fuera del campo*.

Como q y q' pueden ser positivas o negativas, la energía potencial también puede ser positiva o negativa. Cuando las dos cargas tienen el mismo signo, la fuerza es repulsiva y la energía potencial positiva, en caso contrario la fuerza es de atracción y la energía potencial es negativa.

- Si $E_p(\vec{r}) > 0 \Rightarrow W_{\vec{r}}^\infty > 0$ y q' mueve espontáneamente hacia fuera del campo
- Si $E_p(\vec{r}) < 0 \Rightarrow W_{\vec{r}}^\infty < 0$ y es necesaria una fuerza externa para sacar a q' del campo. En este caso, como en el campo gravitatorio, el trabajo que tiene que realizar la fuerza externa para sacar a q' del campo es igual al negativo de la energía potencial de q' en el punto $\vec{r}$. Esto es

$$W_{\vec{r}}^\infty(ext) = -W_{\vec{r}}^\infty(campo) = -E_p(\vec{r}) > 0$$ [6]

Si el campo eléctrico lo crean varias partículas de cargas q_1, q_2, q_3,... q_n, la energía potencial de una partícula de masa q' en un punto de dicho campo es la suma algebraica de las energías debidas a cada partícula, porque la E_p es un escalar y el campo cumple el principio de superposición; es decir,

$$E_p = E_{p,1} + E_{p,2} + \cdots + E_{p,n}$$

1.3.2. Potencial eléctrico y diferencia de potencial

Se define el ***potencial eléctrico (V)*** en un punto de un campo como *la energía potencial que adquiere la unidad de carga positiva colocada en dicho punto*.

Si una carga q' tiene una energía potencial $E_p(\vec{r})$ en el punto definido por $\vec{r}$, el potencial en él, sabiendo que la energía potencial es proporcional a la carga, es,

$$V(\vec{r}) = \frac{E_p(\vec{r})}{q'}$$

El potencial es una magnitud escalar que no depende de q; por lo tanto, el signo de $V(\vec{r})$ depende únicamente de la carga del cuerpo creador del campo. En el caso particular de un campo creado por una carga puntual q tenemos,

[6] Es así porque la fuerza externa mínima que hay que aplicar es igual y de signo opuesto a la que hace el campo. Por tanto, el trabajo que realiza es el mismo, pero de signo opuesto (o sea, positivo).

$$\left.\begin{array}{l} V(\vec{r}) = E_p(\vec{r})/q' \\ E_p(\vec{r}) = kqq'/r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{V(\vec{r}) = k\frac{q}{r} \;\; con \;\; k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}}$$

Si tenemos un campo creado por una carga puntual, se deduce de la ecuación anterior que *el potencial disminuye al alejarnos de la carga si ésta es positiva y aumenta si es negativa*. Esto es válido sea cual sea el cuerpo que crea el campo.

Si el campo eléctrico lo crean varias partículas de cargas q_1, q_2, q_3,... q_n, el potencial de una partícula de carga q' en un punto de dicho campo, al igual que la energía potencial, es la suma algebraica de los potenciales de cada partícula, ya que el campo eléctrico cumple el principio de superposición; o sea,

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$$

Es evidente, de acuerdo con su definición, que no podemos conocer el potencial absoluto en un punto, sólo se pueden medir diferencias de potencial entre dos puntos. La cantidad dada por la ecuación anterior es realmente la diferencia de potencial entre el punto definido por el vector $\vec{r}$ y el infinito, que se toma como referencia. Puesto que $V = E_p/q'$, se cumple que,

$$V_a - V_b = \frac{E_p(a) - E_p(b)}{q'} = \frac{W_a^b}{q'} \;\Rightarrow\; W_a^b = q'\left(V_a - V_b\right) \quad (5)$$

donde W_a^b es el trabajo realizado por el campo cuando la carga q' se mueve entre desde el punto a al b. Por lo tanto, *la diferencia de potencial entre dos puntos* a *y* b *de un campo eléctrico expresa el trabajo que realiza el campo sobre la unidad de carga positiva cuando ésta se desplaza desde* a *hasta* b*; es decir, el trabajo que ha de realizar un agente externo que ejerce una fuerza igual y de sentido opuesto a la del campo cuando la unidad de carga positiva se mueve desde* b *hasta a*.

Teniendo en cuenta que en el SI la energía potencial se mide en julios y la carga en culombios, está claro que el potencial ha de expresarse en *J/C*, que recibe el nombre de ***voltio*** *(V)*. Si en la ecuación el trabajo realizado es de 1 *J* y la carga que se mueve de 1 *C*, entonces la diferencia de potencial es de 1 *V*. Por lo tanto, *1 voltio es la diferencia de potencial que existe entre dos puntos de un campo eléctrico cuando el trabajo que realiza el campo sobre la carga de 1 C al desplazarse de un punto a otro es de 1 J.*

Cuando se trabaja con campos eléctricos a escala atómica, el julio es una unidad de energía demasiado grande. Por ello se utiliza una unidad más adecuada denominada ***electronvoltio*** *(eV)*, definida como *la energía adquirida por un electrón cuando se le somete a una diferencia de potencial de 1 voltio.*

Como, $$E_p(a) - E_p(b) = q\left(V_a - V_b\right)$$

aplicando la definición de electronvoltio,

$$1eV = q_{electrón} \cdot 1V = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 1\,J/C = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J$$

que da la relación entre el electronvoltio y el julio.

1.3.3. Superficies equipotenciales

Al igual que el potencial gravitatorio, el potencial eléctrico $V(\vec{r})$ es un escalar que, en cada punto, no depende de la carga q colocada en él y está definido en todos los puntos de la región del espacio en los que se manifiesta el campo. Por lo tanto, en esa región existe un campo escalar, *el campo escalar de potenciales*.

Recordemos que un campo escalar se representa gráficamente por medio superficies equipotenciales, que son el lugar geométrico de los puntos del campo en los que el potencial tiene el mismo valor.

En las figuras (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) y (*e*) de las páginas 7 y 8 se han dibujado las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales para varios campos. Observemos que en el caso de una carga puntual negativa son idénticas a las de un campo gravitatorio creado por una masa puntual; esto era de esperar ya que los campos gravitatorio y eléctrico son matemáticamente idénticos. Si el campo es uniforme, las superficies equipotenciales son planos paralelos.

Puesto que la ecuación que expresa el potencial en el caso del campo creado por una partícula (o una esfera) de carga q es,

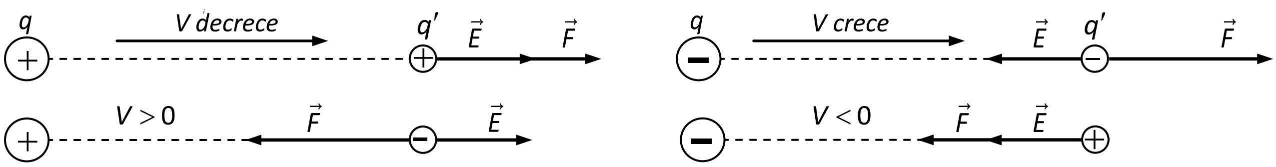
$$V(\vec{r}) = kq/r$$

queda claro que todos los puntos situados a una distancia r de la partícula o del centro de la esfera tienen el mismo potencial, por lo que las superficies equipotenciales son esferas concéntricas, como ilustran las figuras (*a*) y (*b*) de la página 8. La separación de las superficies es mayor al aumentar su radio ya que entonces una misma variación del potencial implica una distancia mayor.

Como se aprecia en todas las figuras de las páginas 8 y 9, *las superficies equipotenciales son en cada punto perpendiculares a la línea de fuerza que pasa por ese punto y, en consecuencia, a la intensidad del campo eléctrico*. (**I**)

En la figura se ha dibujado la fuerza que el campo eléctrico creado por una carga puntual fija q ejerce sobre otra q' y la intensidad del campo en el punto donde está q'. Teniendo en cuenta que $V(\vec{r}) = kq/r$ y que el signo del potencial es el mismo que el de q, se observa, analizando cada uno de los casos, que la fuerza está orientada en el sentido de los potenciales decrecientes cuando q' es positiva y en el sentido de los potenciales crecientes cuando q' es negativa.

De la definición de $\vec{E}(\vec{r})$ y del signo de $V(\vec{r})$ se desprende, como se ve en la figuras, que la intensidad del campo está orientada siempre en el sentido en el que el potencial decrece. (**II**)



En el punto 1.4.2. demostraremos que lo expresado en los párrafos (I) y (II) se cumple de modo general, sea cual sea el origen del campo.

1.3.4. Trabajo en una superficie equipotencial

Sea una carga puntual q' en el interior de un campo eléctrico. Obliguemos a q' a desplazarse desde un punto a hasta *otro b a lo largo de una superficie equipotencial*. Se cumple que,

$$\left.\begin{array}{l} W_a^b = E_p(a) - E_p(b) \\ V = E_p/q' \Rightarrow E_p = q'V_p \end{array}\right\} \Rightarrow W_a^b = q'V_a - q'V_b = q'\left(V_a - V_b\right)$$

pero, por pertenecer *a* y *b* a la misma superficie equipotencial,

$$V_a = V_b \;\Rightarrow V_a - V_b = 0$$

por lo que el trabajo realizado por el campo es,

$$W_a^b = q'\left(V_a - V_b\right) = q' \times 0 = 0$$

Es decir, el trabajo realizado por un campo eléctrico sobre una carga que mueve a lo largo de una superficie equipotencial es nulo.

1.4. Relación entre el campo y el potencial

En todo campo conservativo se puede obtener la intensidad del campo a partir del potencial y el potencial a partir de la intensidad. Esto significa que se puede describir el campo eléctrico por medio del potencial (magnitud escalar), del mismo modo que cuando se usa la intensidad del campo (magnitud vectorial).

1.4.1. Obtención del potencial a partir del campo.

Para obtener el potencial en función de la intensidad recordemos que si una carga q' se mueve entre dos puntos *a* y *b* de un campo eléctrico (por cualquier trayectoria), se cumple que,

$$E_p(a) - E_p(b) = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Recordando que,

$$V(\vec{r}) = E_p(\vec{r})/q' \Rightarrow E_p(\vec{r}) = q'V(\vec{r}) \quad \text{y} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})/q' \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = q'\vec{E}(\vec{r})$$

podemos expresar la ecuación anterior como,

$$q'\left(V_a - V_b\right) = \int_a^b q'\vec{E} \cdot d\vec{r} = q'\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

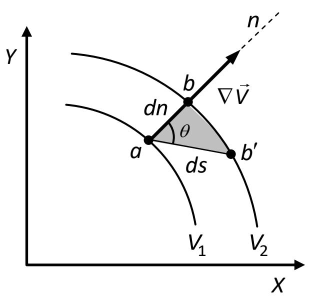
ya que q' es una constante y sale de la integral. Así pues, al cancelar q', tenemos,

$$\boxed{V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}} \quad (6)$$

Si hacemos $b = \infty$ y el vector de posición de *a* es $\vec{r}$, queda que,

$$\boxed{V(\vec{r}) = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}}$$

ya que $V(\infty) = 0$ por convenio. Relación que permite calcular el potencial en función de la intensidad del campo.



1.4.2. Vector gradiente. Obtención del campo a partir del potencial

Consideremos por sencillez un campo eléctrico definido en el plano *XY* de un sistema de coordenadas. Entonces el potencial eléctrico viene expresado por una función escalar $V(x,y)$ y, en consecuencia, las superficies equipotenciales se transforman en líneas equipotenciales.

La figura muestra dos líneas equipotenciales $V_1(x,y) = V_1$ y $V_2(x,y) = V_2$ de un campo definido en el plano *XY*, donde $V_2 > V_1$. Al pasar de un punto a de V_1 a cualquier punto b' de V_2, la función $V(x,y)$ experimenta siempre el mismo cambio $V_2 - V_1$. Si V_1 y V_2 difieren en un valor infinitesimal, podemos escribir que,

$$dV = V_2 - V_1$$

y la variación del potencial por unidad de longitud en una dirección particular $\overline{ab'}$ (denominada ***derivada direccional*** en el lenguaje matemático) es,

$$\frac{V_2 - V_1}{ds} = \frac{dV}{ds}$$ [7]

donde ds representa la distancia (infinitesimal) entre a y b'.

En el caso de que dos puntos a y b se encuentren en la recta normal n común a ambas superficies, la derivada direccional a lo largo de la normal $\overline{ab}$ es dV/dn (ver figura), donde dn es la distancia (infinestimal) entre a y b. Pero en la figura de la página anterior se ve que,

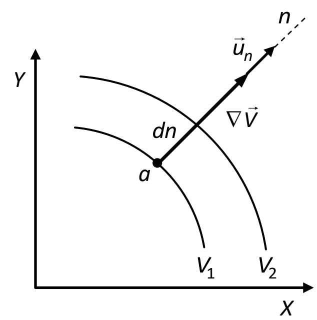
$$dn = ds\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = dn/ds$$ [8]

entonces tenemos, al multiplicar y dividir dV/ds por dn, que,

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dn}\frac{dn}{ds} = \frac{dV}{dn}\cos\theta$$

que relaciona las derivadas direccionales a lo largo de la recta normal y a lo largo de cualquier otra dirección. Como el valor máximo del coseno se obtiene para el ángulo $\theta = 0$, tenemos que,

$$\left.\frac{dV}{ds}\right|_{\max} = \frac{dV}{dn}\cos 0 = \frac{dV}{dn}$$

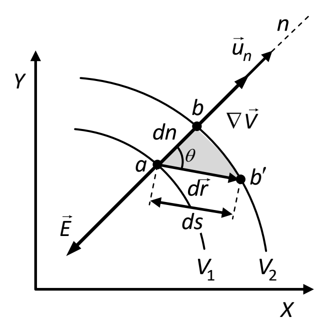


por lo que dV/dn nos da la derivada direccional máxima de $V(x,y)$; es decir, la máxima variación del potencial por unidad de longitud e indica que, en cada punto, se obtiene en la dirección perpendicular a la superficie equipotencial. Introduciendo el vector unitario $\vec{u}_n$, perpendicular a V_1 en el punto a y dirigido hacia V_2, como ilustra la figura, definimos el ***vector gradiente*** del potencial $V(x,y)$ como,

$$\overrightarrow{grad}\,V = \vec{\nabla}V = \frac{dV}{dn}\vec{u}_n \quad (7)$$

Como $dV > 0 \Rightarrow dV/dn > 0 \Rightarrow$ el sentido de $\overrightarrow{grad}\,V$ es el de $\vec{u}_n$; es decir, el sentido en el que el potencial crece.

Por lo tanto, *el gradiente es un vector perpendicular en cada punto a la línea equipotencial $V(x,y) = cte$ que pasa por ese punto, su magnitud es igual a la derivada direccional máxima de la función potencial y tiene la orientación (dirección y sentido) en la que el potencial crece más por unidad de longitud.*



Sea $d\vec{r}$ el vector que representa el desplazamiento efectuado al movernos desde el punto a de V_1 al b' de V_2; entonces (ver figura) $|d\vec{r}| = \overline{ab'} = ds$. Efectuemos el siguiente producto escalar,

---

[7] De nuestros conocimientos de derivadas concluimos que dV/ds en el punto a expresa la variación que experimentaría $V(x,y)$ por unidad de longitud en la dirección de ds si, a partir de ese punto, la derivada se mantuviera constante.

[8] Es así porque al ser la figura sombreada infinitesimal, se confunde con un triángulo rectángulo.

$$\overrightarrow{grad}V\cdot d\vec{r}=\frac{dV}{dn}\vec{u}_n\cdot d\vec{r}=\frac{dV}{dn}ds\cos\theta$$

pero, como hemos visto antes, $\cos\theta=dn/ds$, por lo que queda que,

$$\overrightarrow{grad}V\cdot d\vec{r}=\frac{dV}{dn}ds\cos\theta=\frac{dV}{dn}ds\frac{dn}{ds}=dV \;\Rightarrow\; dV=\overrightarrow{grad}V\cdot d\vec{r} \quad (8)$$

El trabajo (infinitesimal) que realiza la fuerza eléctrica $\vec{F}$ sobre una carga q' cuando se mueve del punto *a* al b' es,

$$dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

donde, como ya se ha visto anteriormente,

$$\vec{F}=q'\vec{E} \text{ y } dW=E_a-E_b=q'(V_a-V_b)=-q'(V_b-V_a)=-q'\,dV$$

Por lo tanto,

$$-q'dV=q'\vec{E}\cdot d\vec{r} \;\Rightarrow\; dV=-\vec{E}\cdot d\vec{r} \quad (9)$$

Combinando las ecuaciones (8) y (9) llegamos a,

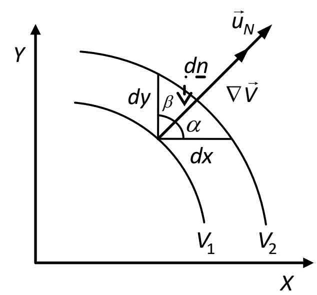
$$\left.\begin{aligned} dV&=\overrightarrow{grad}V\cdot d\vec{r}\\ dV&=-\vec{E}\cdot d\vec{r}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V} \quad (10)$$

ecuación que expresa la intensidad de un campo eléctrico en un punto en función del gradiente de potencial en ese punto (ver figura).

De la ecuación (10) y de las propiedades del vector gradiente concluimos que *la intensidad de un campo eléctrico en un punto es perpendicular a la línea equipotencial que pasa por ese punto, su magnitud es igual a la derivada direccional máxima de la función potencial y tiene la orientación (dirección y sentido) en la que el potencial decrece más por unidad de longitud.*

Veamos finalmente la ecuación que expresa el gradiente en sus componentes rectangulares. Al expresar el vector $\vec{u}_n$ en sus componentes en los ejes *OX* y *OY* tenemos (ver figura) que,

$$\vec{u}_N=|\vec{u}_N|\cos\alpha\,\vec{i}+|\vec{u}_N|\cos\beta\,\vec{j}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j} \quad \text{pues} \quad |\vec{u}_N|=1$$



por lo que la ecuación (7) se transforma en,

$$\overrightarrow{grad}V=\frac{dV}{dn}\vec{u}_n=\frac{dV}{dn}\left(\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}\right)=dV\left(\frac{\cos\alpha}{dn}\vec{i}+\frac{\cos\beta}{dn}\vec{j}\right) \quad (11)$$

De la figura se deduce que,

$$dn=dx\cos\alpha=dy\cos\beta \;\Rightarrow\; \begin{cases}1/dx=\cos\alpha/dn\\ 1/dy=\cos\beta/dn\end{cases} \quad (12)$$

por lo que, combinando las ecuaciones (11) y (12), llegamos a,

$$\overrightarrow{grad}V=dV\left(\frac{1}{dx}\vec{i}+\frac{1}{dy}\vec{j}\right) \;\Rightarrow\; \boxed{\overrightarrow{grad}V=\frac{dV}{dx}\vec{i}+\frac{dV}{dy}\vec{j}} \quad (13)$$

que es la ecuación que expresa el gradiente de una función escalar en función de sus componentes rectangulares. Como,

$$\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}=-\overrightarrow{grad}V=-\left(\frac{dV}{dx}\vec{i}+\frac{dV}{dy}\vec{j}\right) \Rightarrow E_x=-\frac{dV}{dx} \text{ y } E_y=-\frac{dV}{dy} \quad (14)$$

Todos los resultados son generalizables a campos definidos en el espacio.

Es importante tener en cuenta que en los campos eléctricos definidos en el espacio se tienen **superficies de nivel** en lugar de líneas y que las ecuaciones (13) y (14) se transforman en,

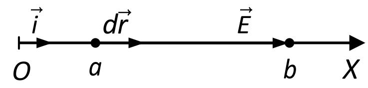
$$\overrightarrow{grad}\,V=\frac{dV}{dx}\vec{i}+\frac{dV}{dy}\vec{j}+\frac{dV}{dz}\vec{k} \quad \text{y} \quad E_x=-\frac{dV}{dx};\ E_y=-\frac{dV}{dy};\ E_z=-\frac{dV}{dz}$$

Donde z representa la coordenada en el eje OZ y $\vec{k}$ su vector unitario.

1.4.3. Relación entre el campo y el potencial en un campo eléctrico uniforme

Vamos a obtener la relación entre el campo y el potencial en el caso particular, pero muy importante, de un campo eléctrico uniforme.

Consideremos un campo uniforme orientado en el eje OX de un sistema de coordenadas, como ilustra la figura. De acuerdo con la ecuación (6), la diferencia de potencial entre los puntos a y b, es,



$$V_a-V_b=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

ahora bien, como $d\vec{r}$ y $\vec{E}$ solo tienen componente en el eje OX, tenemos que,

$$\vec{E}=E\,\vec{i} \ \text{ y } \ d\vec{r}=dx\,\vec{i} \ \Rightarrow \ \vec{E}\cdot d\vec{r}=E\,\vec{i}\cdot dx\,\vec{i}=E\,dx\cos 0=E\,dx$$

donde E y dx son las componentes de $\vec{E}$ y $d\vec{r}$ en el eje OX[9]. Por lo tanto,

$$V_a-V_b=\int_{x_a}^{x_b}E\,dx=E\int_{x_a}^{x_b}dx=E\left[x\right]_{x_a}^{x_b}=E(x_b-x_a)=E\,d$$

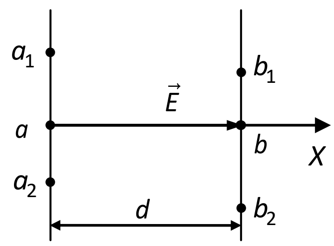
ya que $E = cte$ y $d=x_b-x_a>0$ (distancia entre a y b). Entonces,

$$\boxed{E=\frac{V_a-V_b}{d}=\frac{-\left(V_b-V_a\right)}{d}=-\frac{\Delta V}{d}}$$

La ecuación muestra que el campo eléctrico se puede expresar también en V/m, unidad equivalente a N/C. Esto se puede ver de la siguiente forma,

$$\frac{V}{m}=\frac{J/C}{m}=\frac{J}{C\cdot m}=\frac{N\cdot m}{C\cdot m}=\frac{N}{C}$$

Recordemos que las superficies equipotenciales de un campo uniforme son planos paralelos perpendiculares a la intensidad del campo $\vec{E}$ y que ésta apunta siempre en el sentido de los potenciales decrecientes. Esto significa que en el campo uniforme de la figura, los puntos a, a_1, y a_2 tienen el mismo potencial, por pertenecer a la misma superficie equipotencial; lo mismo es aplicable a los puntos b, b_1 y b_2. Asimismo, el potencial del punto b es menor que el del punto a, por estar la superficie b más a la derecha y apuntar el campo eléctrico en ese sentido. Así,



El valor d que aparece en la ecuación anterior es siempre la mínima distancia entre las superficies equipotenciales que pasan por los puntos a y b. Asimismo, $V(a)>V(b)\ \Rightarrow\ E>0$, lo que significa que el campo de la figura está orientado de a a b. Si $V(a)<V(b)\ \Rightarrow\ E<0$ y la orientación del campo es la opuesta

[9]Nota que E, en este caso, representa la magnitud del campo con signo positivo si éste está dirigido en el sentido positivo del eje y negativo en caso contrario.

1.5. Movimiento de cargas puntuales en campos eléctricos

1.5.1. En campos creados por cargas puntuales

Consideremos en primer lugar el caso de un campo creado por una sola carga. Sean dos partículas puntuales[10] de cargas Q y q y de masas M y m, donde $M_Q >> m_q$. Entonces, Q se encuentra prácticamente en reposo en un sistema inercial y q se mueve en el campo eléctrico creado por Q. Si los signos de las cargas son distintos, la fuerza eléctrica que se ejercen es de atracción y la fuerza gravitatoria es despreciable frente a la eléctrica. En este caso particular es aplicable todo lo dicho en el estudio del movimiento de planetas y satélites. Su energía mecánica, que es constante (pues el campo eléctrico es conservativo), es,

$$E = E_c + E_p = ½\, mv^2 + k\frac{Qq}{r} = cte$$

donde $E_p < 0$ ya que los signos de Q y q son distintos.

La trayectoria de q depende de su energía mecánica y de su momento angular respecto a Q. Si la energía es negativa, entonces q está atrapada en el campo eléctrico creado por Q y su trayectoria es una circunferencia o una elipse, dependiendo del momento angular. Si éste es máximo se da una circunferencia y si no lo es una elipse, tanto más excéntrica cuanto menor es el momento angular.

Si la energía es igual o mayor que cero, entonces q no está atrapada en el campo de Q y su trayectoria es abierta. Se trata de una parábola en el caso de energía nula y de una hipérbola en el caso de una energía mayor que cero.

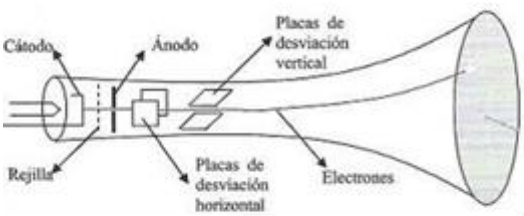
En el caso de varias cargas puntuales Q_1, Q_2, Q_3 ..., que suponemos fijas en un sistema inercial, y una carga q moviéndose en el campo creado por ellas, la energía mecánica de q es,

$$E = E_c + E_p = ½\, mv^2 + \sum_i k\frac{Q_i q}{r_i} = cte$$

donde E_p es la energía potencial de q, que es la suma de las energías potenciales debidas a cada una de las cargas que crean el campo eléctrico.

En este caso más complejo podemos afirmar que, como en el caso anterior, si la energía mecánica de q es positiva, la partícula tiene energía cinética suficiente para escapar del campo y quedará atrapada en él en caso contrario. La trayectoria seguida en cada caso por la carga es compleja y depende de las cargas que crean el campo y de sus posiciones relativas.

1.5.2. En campos uniformes



Hasta hace poco tiempo multitud de dispositivos electrónicos, tanto en productos de consumo (televisión) como en instrumentos científicos (osciloscopios) estaban basados en el *tubo de rayos catódicos*, como el ilustrado en la figura. En este tubo se ha hecho el vacío y uno de sus extremos posee un *cañón de electrones* (filamento metálico que, al calentarse, emite estas partículas, las cuales pueden ser sepa-

[10] El razonamiento también es válido para cuerpos esféricos con su carga distribuida uniformemente en su volumen o en su superficie.

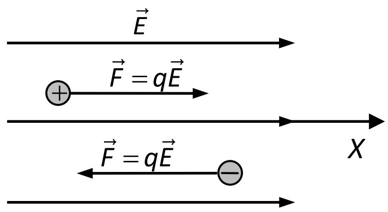
radas del filamento y aceleradas mediante un campo eléctrico). Los electrones, al incidir sobre una pantalla fosforescente, provocan la aparición de un punto luminoso sobre ella.

Si se somete el haz de electrones a la acción de un campo eléctrico uniforme y perpendicular a su movimiento, se desvía en esa dirección[11]. El movimiento que experimenta el haz depende del campo; así, si el campo varía, por ejemplo, sinusoidalmente, también lo hará el haz. Finalmente, sometiendo el haz a la acción de dos campos variables perpendiculares al mismo y perpendiculares entre sí, el punto luminoso se moverá por la pantalla a voluntad.

Estudiemos el movimiento de partículas cargadas en el interior de campos **eléctricos uniformes** en tres casos particulares sencillos (pero muy importantes):

1. Partícula que se mueve en la misma dirección del campo.
2. Partícula que se mueve perpendicularmente al campo.
3. Partícula que se mueve oblicuamente al campo.

Partícula que se mueve en la misma dirección del campo



Sea una partícula de masa m[12] y carga q que se mueve con una velocidad inicial v_0 en un campo eléctrico uniforme en la misma dirección que la intensidad del campo $\vec{E}$, (orientado en la dirección del eje *OX*) como ilustra la figura. La fuerza (constante) que actúa sobre q es,

$$\vec{F}=q\vec{E}$$

que le comunica una aceleración constante en la dirección de $\vec{E}$ igual a,

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}=\frac{q}{m}\vec{E}$$

Como velocidad y aceleración tienen la misma dirección y ésta es constante, el movimiento es **rectilíneo uniformemente variado** en la dirección de $\vec{E}$ (que es la del eje *OX*). Al ser el movimiento rectilíneo a lo largo el eje *OX*, la aceleración se puede expresar en su forma escalar,

$$a=\frac{q}{m}E$$

donde E es la magnitud del campo eléctrico con signo positivo si está orientado en el sentido positivo del eje y negativo si su sentido es el opuesto. La velocidad en un instante dado es,

$$v=v_0+at=v_0+\frac{q}{m}Et$$

y la posición y el desplazamiento vienen dados por,

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}\frac{q}{m}Et^2 \;\Rightarrow\; \Delta x=x-x_0=v_0t+\frac{1}{2}\frac{q}{m}Et^2$$

Si la partícula se coloca en reposo en el campo ($v_0 = 0$), se anula el término que contiene a v_0.

El sentido del movimiento en un determinado instante depende del signo de la

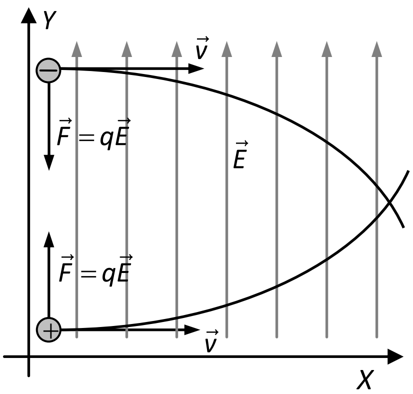
[11]Se puede conseguir un efecto similar con campo magnético en la dirección adecuada

[12]La interacción gravitatoria no la tenemos en cuenta porque es despreciable frente a la eléctrica.

velocidad. Una velocidad positiva indica un movimiento en el sentido positivo del eje y una velocidad negativa un movimiento en el sentido opuesto.

En un instante particular el movimiento es acelerado si el signo de la velocidad y el de la aceleración es el mismo, en caso contrario el movimiento es decelerado. De acuerdo con la ecuación $a = qE/m$, el signo de la aceleración depende de los signos de q y de E. Por ejemplo, un campo orientado hacia la derecha ($E > 0$) y una carga $q > 0$ dan una aceleración positiva (fuerza orientada hacia la derecha), mientras que si $q < 0$ la aceleración sería negativa (fuerza hacia la izquierda).

Partícula que se mueve perpendicularmente al campo



Sea una partícula de masa m y carga q que se mueve con una velocidad v_0 en un campo eléctrico uniforme en una dirección perpendicular al campo (orientado en la dirección del eje OY) como ilustra la figura. Igual que en el caso anterior, la aceleración que el campo le comunica a la partícula es,

$$a = \frac{q}{m}E$$

pero en la dirección vertical (eje OY); esto es, perpendicular a la velocidad. Por lo tanto, la partícula lleva un movimiento uniforme de velocidad v_0 en la dirección del eje OX y un movimiento con aceleración constante (uniformemente variado) en la dirección del eje OY; hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. La composición de estos dos movimientos da lugar a un movimiento cuya trayectoria es una parábola, como ilustra la figura de la página anterior. Las ecuaciones del movimiento son,

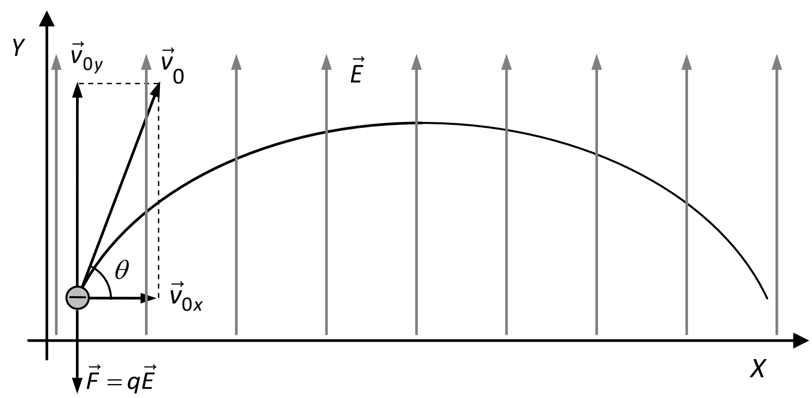
$$OX \quad x = x_0 + v_0 t$$

$$OY \quad y = y_0 + \frac{1}{2}\frac{q}{m}Et^2 \;\Rightarrow\; \Delta y = y - y_0 = \frac{1}{2}\frac{q}{m}Et^2;\; v = \frac{q}{m}Et$$

donde x e y son las coordenadas de la partícula en un instante cualquiera t, x_0 e y_0 las coordenadas en el instante inicial, $\Delta y = y - y_0$ el desplazamiento y v la velocidad en el eje OY en el instante t.

Partícula que se mueve en una dirección que forma un ángulo θ con el campo

Consideremos el caso más general de una partícula de masa m y carga q que se mueve con una velocidad v_0 en una dirección que forma un ángulo θ con $\vec{E}$, como refleja la figura.



Podemos expresar $\vec{v}_0$ en sus dos componentes según los ejes OX y OY,

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{0x} + \vec{v}_{0y} = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \ \ \text{y} \ \ v_{0y} = v_0 sen\theta$$

La componente en el eje *OX* (v_{0x}) es la velocidad constante de la partícula en el eje *OX* y la componente en el eje *OY* (v_{0y}) la velocidad inicial en el eje *OY*, que varía en el tiempo ya que en este eje el movimiento es variado.

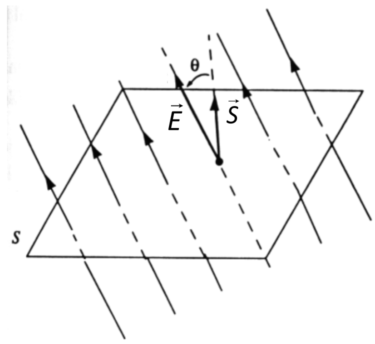
La trayectoria sigue siendo una parábola, con la única diferencia con el caso anterior de que el movimiento en el eje *OY* no parte del reposo sino que lo hace con una velocidad inicial. Las ecuaciones del movimiento son, por lo tanto

$$OX \quad x = x_0 + v_0 \cos\theta \cdot t$$

$$OY \quad y = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\theta \cdot t + \frac{1}{2}\frac{q}{m}Et^2; \ \ v = v_0 \operatorname{sen}\theta + \frac{q}{m}Et$$

1.6. Flujo del campo eléctrico. Teorema de Gauss

1.6.1. Flujo del campo eléctrico



Sea un campo eléctrico uniforme de intensidad $\vec{E}$ y una superficie plana de área *S* en su interior, como muestra la figura. El flujo del campo (Φ) a través de la superficie se define como,

$$\Phi = ES\cos\theta$$

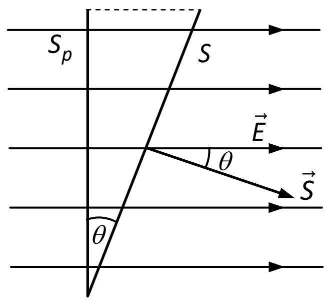
donde θ es el ángulo que forman el vector $\vec{E}$ y la perpendicular a la superficie, *E* la magnitud de la intensidad del campo y *S* el área de la superficie.

En el SI el campo eléctrico se mide en *N/C* y el área en m^2, por lo que la unidad del flujo es el $N{\cdot}m^2/C$.

Si definimos el vector $\vec{S}$ de modo que su módulo coincida numéricamente con el área de la superficie y de dirección perpendicular a la misma; podemos expresar el flujo por el siguiente producto escalar,

$$\Phi = \vec{E}\cdot\vec{S}$$

que permite hallar el flujo de un campo constante a través de una superficie plana.



En la figura, que muestra la superficie vista de perfil, se ve que la proyección de *S* en la dirección perpendicular al campo (S_p) es igual a,

$$S_p = S\cos\theta$$

por lo que, combinando esta ecuación con $\Phi = E\,S\cos\theta$, también podemos expresar el flujo como,

$$\Phi = E\,S_p$$

Esta ecuación permite dar una interpretación sencilla al flujo. En efecto, al ser el campo constante, las líneas de fuerza (*ldf*) son paralelas y se distribuyen uniformemente en la superficie perpendicular al campo S_p (esto es, su número es proporcional a S_p), como ilustra la figura. En este caso la densidad de líneas (d_{ldf}), que es constante, es igual a,

$$d_{ldf} = Nldf / S_p$$

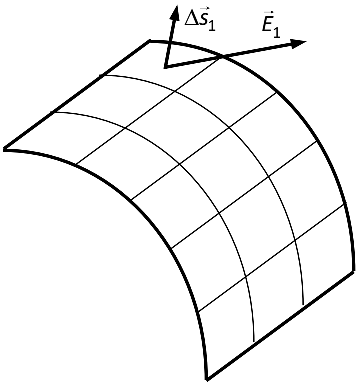
donde *Nldf* es el número de líneas de fuerza que atraviesan S_p.

Si convenimos en dibujar un número de líneas de fuerza tal que su densidad coincida con la magnitud de *E* (esto es, $d_{ldf} = E$), tenemos que,

$$\Phi = E\,S_p = d_{ldf} \times S_p = \frac{Nldf}{S_p} \times S_p = Nldf$$

Por lo tanto, el flujo a través de *S* se puede interpretar como el número de líneas de fuerza que atraviesan S_p. Ahora bien, la figura muestra que el número de líneas que atraviesan *S* y S_p es el mismo; por lo tanto, concluimos que *el flujo de un campo eléctrico constante a través de una superficie plana cualquiera se puede interpretar como el número de líneas de fuerza que atraviesan dicha superficie*.

Esta interpretación es de validez general; es decir, se puede aplicar al caso de campos no uniformes y superficies no planas.



De acuerdo con su definición, el flujo es una magnitud escalar y su signo depende del ángulo θ que, a su vez, depende de la orientación que se le dé al vector $\vec{S}$. Por su parte, su unidad en el SI ha de ser el $N{\cdot}m^2/C$.

Si el campo no es constante y/o la superficie no es plana, tenemos que proceder como lo hicimos en el tema Introducción a la Física para hallar el trabajo de una fuerza variable; es decir, recurrir al cálculo integral.

Queremos calcular el flujo de un campo eléctrico que es una función de la posición $\vec{E}(x,y,z)$ a través de una superficie curva *S*, como ilustra la figura. Si dividimos *S* en *n* pequeños trozos de área ΔS_i , vemos que:

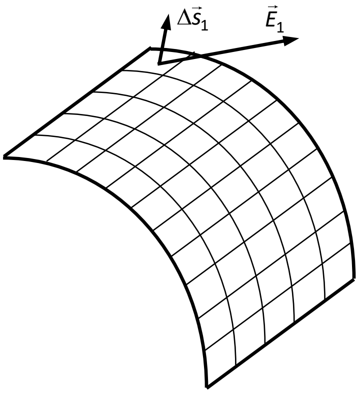
1. El campo varía poco en ellos, pues depende de la posición y los trozos son pequeños; es decir, $\vec{E}$ es aproximadamente contante en cada trozo.
2. Al ser los trozos pequeños, éstos se aproximan a superficies planas. Entonces podemos definir los vectores $\Delta\vec{S}_i$ de modo que su módulo coincida con el área del trozo *i* y su dirección sea perpendicular al mismo.

Entonces, si aplicamos la ecuación $\Phi = \vec{E}\cdot\vec{S}$ al trozo 1 (ver figura), tenemos que el flujo a través de él es, aproximadamente,

$$\Phi_1 \approx \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{S}_1$$

y el flujo del campo a través de toda la superficie *S* es aproximadamente,

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_n \approx \vec{E}_1\cdot\Delta\vec{S}_1 + \vec{E}_2\cdot\Delta\vec{S}_2 + \cdots + \vec{E}_n\cdot\Delta\vec{S}_n = \sum_i \vec{E}_i\cdot\Delta\vec{S}_i$$



Para llevar a cabo una aproximación mejor podemos dividir *S* en un número mayor de trozos, como en la figura, de modo que cada ΔS_i sea menor y la variación del valor de $\vec{E}_i$ en cada intervalo más pequeña. Está claro que podemos obtener mejores aproximaciones tomando ΔS_i más pequeños cada vez, con el fin de tener mayor número de intervalos. Alcanzaremos el *resultado exacto* para el flujo del campo a través de *S* si calculamos, en lugar de la suma, *el límite de la suma cuando todos los* ΔS_i *tienden a cero* (lo que implica que el número *n* de intervalos tiende a infinito); es decir,

$$\Phi = \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i$$

que en el lenguaje matemático se conoce como *integral de la función vectorial* $\vec{E}(x,y,z)$ *extendida a la superficie S*. Se expresa como,

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \text{ó} \quad \Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

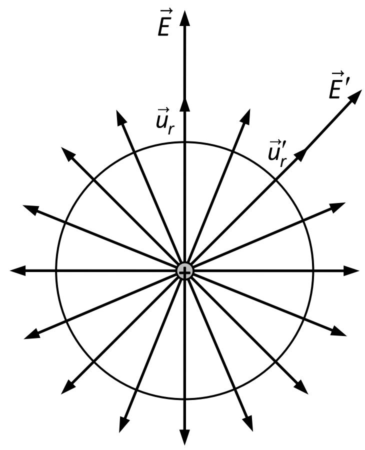
Según que *S* sea una superficie abierta o cerrada, respectivamente.

Podemos interpretar a $d\vec{S}$ como un vector infinitesimal perpendicular a *S* en cada punto, cuyo módulo es el área de un elemento infinitesimal de superficie en el que $\vec{E} = cte$; por lo que podemos aplicar la ecuación del flujo de un campo constante a través de una superficie plana,

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

donde $d\Phi$ representa el flujo (infinitesimal) del campo $\vec{E}$ a través de $d\vec{S}$ en un lugar particular de la superficie *S*. La integral se interpreta entonces como la suma de todos los flujos infinitesimales extendida a toda la superficie *S*.
En el caso particular de una *S* cerrada, se conviene en que el sentido de $d\vec{S}$ se elija hacia afuera de *S*.

1.6.2. Teorema de Gauss



Vamos a calcular el flujo de un campo creado por una carga puntual *q* positiva a través de una superficie esférica *S* concéntrica con la carga, como ilustra la figura. Es el caso más sencillo, pero también es muy importante.

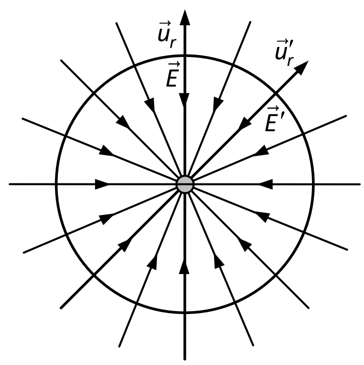
Observa que las líneas de fuerza son radiales y orientadas hacia afuera, por lo que $\vec{E}$ y $\vec{u}_r$ (vector unitario normal a *S* en cada punto) tienen la misma dirección y sentido; es decir, que $\vec{E}$ y *S* son perpendiculares en todos los puntos de la superficie esférica. Entonces el ángulo que forman $\vec{E}$ y $\vec{u}_r$ es $\theta = 0$.

Si *R* es el radio de la esfera, se cumple en todos los puntos de la superficie que,

$$E = k\frac{|q|}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{|q|}{R^2} = cte$$

por lo que, aunque *S* no es plana, podemos aplicar la ecuación $\Phi = ES\cos\theta$. Recordando que el área de una esfera de radio *R* es $S = 4\pi R^2$, tenemos que,

$$\Phi = ES\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{|q|}{R^2}4\pi R^2\cos 0 = \frac{|q|}{\varepsilon} > 0 \quad (\text{pues } \cos 0 = 1)$$



que expresa el flujo del campo eléctrico a través de la esfera. Observa que el signo del flujo es positivo porque, por convenio, se ha orientado $\vec{u}_r$ hacia afuera.

Si el campo lo crea un carga negativa, las líneas de fuerza están orientadas hacia adentro y $\theta = 180º$, como se aprecia en la figura. En esta caso,

$$\Phi = ES\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{|q|}{R^2}4\pi R^2\cos 180 = -\frac{|q|}{\varepsilon} < 0 \quad (\text{pues } \cos 180 = -1)$$

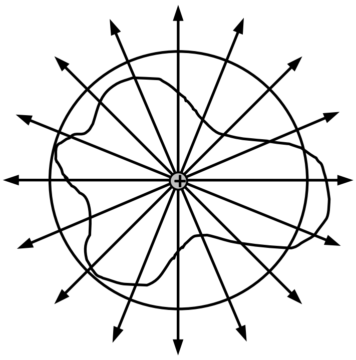
Si la ecuación se escribe como,

$$\boxed{\Phi = \frac{q}{\varepsilon}}$$

tenemos que si $q > 0 \Rightarrow \Phi > 0$ y si $q < 0 \Rightarrow \Phi < 0$, como , por convenio, deseamos que se cumpla.

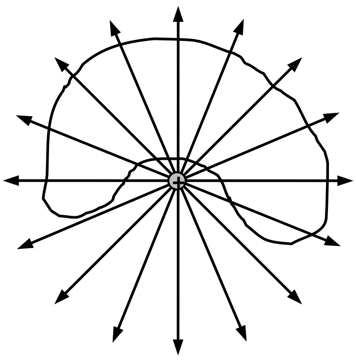
De acuerdo con el convenio adoptado, las líneas de fuerza salen de la superficie cuando el flujo es positivo y entran en ella cuando es negativo.

Nota que el flujo no depende del radio de la esfera, lo que es lógico porque el número de líneas de fuerza que atraviesan la superficie esférica no depende del tamaño de ésta.



La ecuación del flujo es válida para cualquier superficie que rodee a la carga. En efecto, la figura superior prueba que el número de líneas de fuerza que atraviesan cualquier superficie cerrada que encierra a la carga es el mismo, sea cual sea la forma de ésta, por lo que el flujo también ha de ser el mismo.

Por otro lado, si la carga no está en el interior de la superficie, el flujo a través de ésta es cero ya que el número de líneas de fuerza que salen de la misma (y que contribuyen positivamente al flujo) es el mismo que el número de líneas que entran (y que contribuyen negativamente al flujo), como se ve en la figura inferior.



El campo eléctrico cumple el principio de superposición; por lo tanto, si se tienen varias cargas q_1, q_2, q_3, ... dentro de una superficie arbitraria, el flujo total a través de la misma es la suma algebraica de los flujos debidos a cada carga, pues se trata de una magnitud escalar. Entonces podemos escribir la expresión anterior como,

$$\boxed{\Phi = \frac{\sum q_i}{\varepsilon} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon}} \quad (\varepsilon = \varepsilon_0 \text{ en el vacío})$$

donde cada q_i va con su correspondiente signo. Este resultado se conoce como ***teorma de Gauss*** y la superficie se llama ***superficie de Gauss*. Es una de las cuatro ecuaciones básicas del electromagnetismo**.

Notemos que la ley también es válida si la superficie encierra cuerpos extensos cargados. Efectivamente, un cuerpo extenso cargado se puede dividir (de forma imaginaria) en elementos de volumen infinitesimal, de modo que cada uno se comporta como una partícula cargada. De este modo el cuerpo equivale a una distribución de cargas puntuales, lo que permite la aplicación de la ley de Gauss escribiendo en el segundo miembro de la ecuación la carga del cuerpo.

1.7. Aplicaciones del teorema de Gauss: Campos eléctricos creados por elementos continuos

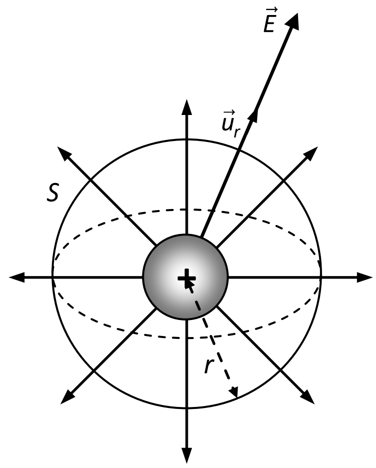
La ley de Gauss puede emplearse para calcular $\vec{E}$ si la simetría de la distribución de cargas que crea el campo es alta, de modo que en cada punto del espacio conocemos, por simetría, la dirección y el sentido del campo.

Los casos que vamos a tratar se refieren a elementos cuya carga es continua y se encuentra distribuida de forma uniforme.

1.7.1. Esfera.

Sea una esfera de carga q, de modo que q está distribuida uniformemente por todo su volumen (o por la superficie) de la esfera. Queremos calcular el campo eléctrico que crea en un punto exterior a la misma cuya distancia a su centro es r.

Consideremos una superficie de Gauss esférica S concéntrica con la esfera cargada y de radio r, como ilustra la figura de la página siguiente. La simetría del problema indica que el campo es radial y que su magnitud es la misma en todos los puntos de *S*; es decir que $E = cte.$ Esto es así porque, desde el punto de vista de la simetría, al estar *S* centrada en la carga, todos los puntos de *S* son equivalentes.



La figura muestra que $\vec{E}$ es perpendicular a *S* en todos los puntos; es decir, tiene la dirección de $\vec{u}_r$, lo que significa que $\theta = 0$. Por lo tanto, el flujo a través de la misma es,

$$\Phi = ES\cos\theta = ES\cos 0 = ES$$

Por otro lado, la ley de Gauss aplicada a *S* afirma que $\Phi = q/\varepsilon$, ya que la carga que encierra la superficie *S* es la de la esfera cargada. Combinando las dos ecuaciones anteriores queda,

$$E 4\pi r^2 = q/\varepsilon \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$

que es la expresión del campo creado por la esfera en un punto exterior a la misma a una distancia *r* de su centro, y que coincide con el creado por una carga puntual de la misma magnitud.

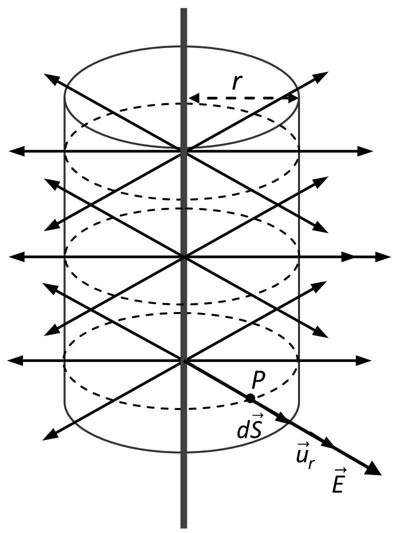
1.7.2. Hilo rectilíneo indefinido

Consideremos un hilo indefinido cargado, de modo que la carga está uniformemente distribuida a lo largo del mismo.

Se define la ***densidad lineal de carga*** (λ) *del hilo como la carga que posee por unidad de longitud.*

Si la carga está distribuida uniformemente, la correspondiente a cada unidad de longitud (esto es, λ) es siempre la misma; es decir, es constante. En este caso, si en una longitud *L* del hilo hay una carga *q*, tenemos,

$$\lambda = q/L \Rightarrow q = \lambda L$$



La simetría del problema sugiere que la intensidad del campo es perpendicular a la distribución de carga y que su magnitud es la misma en todos los puntos situados a la misma distancia del hilo; es decir, $E = cte.$ En la figura se han dibujado las líneas de fuerza en tres planos perpendiculares al hilo. Por lo tanto, para calcular $\vec{E}$ en un punto *P* situado a una distancia *r* del hilo, se puede elegir como superficie de Gauss un cilindro de longitud *l* y radio *r* que pase por *P*, de modo que el hilo cargado sea el eje de simetría del cilindro, como se ve en la figura.

La figura muestra que el flujo a través de las bases (*B*1 y *B*2) del cilindro es cero, ya que el número de líneas de fuerza que las atraviesan es nulo. En la superficie lateral el campo es perpendicular a su superficie (tiene la orientación de $\vec{u}_r$) y su magnitud es constante en todos los puntos de la misma. Así que el flujo a través de la superficie lateral (que es el mismo que el que atraviesa todo el cilindro) es,

$$\Phi = ES_{lat}\cos\theta = ES_{lat}\cos 0 = ES = E\,2\pi rL$$

ya que el área lateral del cilindro es $2\pi rL.$ Aplicando el teorema de Gauss,

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon} = \frac{\lambda L}{\varepsilon}$$

donde *q* es la carga que contiene la porción de hilo encerrado en el cilindro. Combinando las ecuaciones anteriores llegamos a,

$$E2\pi rL=\frac{\lambda L}{\varepsilon}\Rightarrow \boxed{E=\frac{1}{2\pi\varepsilon}\frac{\lambda}{r}}$$

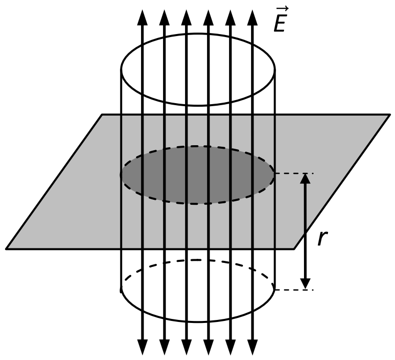
que pone de manifiesto que E no depende de la longitud del cilindro y disminuye proporcionalmente a r y no a r^2 como ocurre en el caso de una partícula o de una esfera. Ello se debe a que el hilo es indefinido (infinito).

La expresión del campo es asimismo válida para un hilo cargado finito, siempre que consideremos puntos cuya distancia al hilo sea despreciable frente a la longitud de éste y que se encuentren alejados de los bordes del hilo.

1.7.3. *Lámina plana indefinida*

Sea una lámina indefinida cargada, de modo que la carga está uniformemente distribuida por ella.

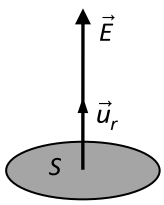
Se define la ***densidad superficial de carga*** *(σ) de la lámina como la carga que posee por unidad de superficie.*



Al estar la carga distribuida uniformemente, la correspondiente a cada unidad de superficie (esto es, σ) es siempre la misma; es decir, es constante. En este caso, si en una superficie S hay una carga q, se cumple,

$$\sigma=q/S\Rightarrow q=\sigma S$$

La simetría del problema sugiere que la intensidad del campo es perpendicular al plano de la distribución de carga y que su magnitud es la misma en todos los puntos situados a la misma distancia de la lámina. En la figura se han dibujado las líneas de fuerza por encima y por debajo del plano de la carga.



Para calcular $\vec{E}$ en un punto situado a una distancia r de la placa se puede tomar como superficie de Gauss el cilindro de longitud $2r$ y base S, como refleja la figura. El flujo a través de la cara lateral del cilindro es cero, ya que el número de líneas de fuerza que la atraviesan es nulo. En las bases del cilindro el campo es perpendicular a las superficies, que son planas, y su magnitud es constante en todos los puntos de las mismas, por lo tanto, si el área de la superficie de cada base es S, se cumple que $S=S_p$ y el flujo a través de ellas, aplicando la ecuación del flujo de un campo constante a través de una superficie plana perpendicular, es,

$$\Phi=2ES\cos\theta=2ES\cos 0=2ES_p=2ES$$

Aplicando la ley de Gauss al cilindro, se tiene que,

$$\Phi=q/\varepsilon=\sigma S/\varepsilon$$

donde q es la carga que contiene la porción de lámina encerrada en el cilindro. Combinando las dos ecuaciones anteriores queda,

$$2ES=\frac{\sigma S}{\varepsilon}\Rightarrow \boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon}}$$

que pone de manifiesto que E no depende del área de S ni de r como ocurre en el hilo; ello se debe a que la lámina es indefinida (infinita) en sus dos dimensiones. La expresión del campo es asimismo válida para una lámina cargada finita, siempre que consideremos puntos cuya distancia a la lámina sea despreciable frente a las dimensiones de ésta y que se encuentren alejados de los bordes de la misma.

1.8. Propiedades eléctricas de la materia: conductores y dieléctricos. Permitividad

1.8.1. Conductores y dieléctricos

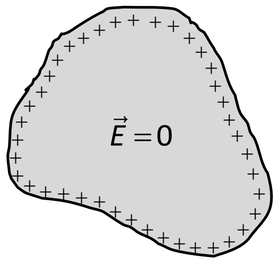
Desde el punto de vista eléctrico la materia puede clasificarse en ***conductora***, cuando permite el movimiento de cargas eléctricas en su interior, y ***dieléctrica*** o ***aislante***, cuando no permite el movimiento de cargas.

En los materiales conductores[13] existen electrones libres (1 ó 2 por átomo generalmente) que pueden moverse libremente por todo el material. Todos los metales y el carbono, en su variedad de grafito, son conductores. Estos conductores sólidos se pueden considerar como una red cristalina de átomos que han perdido uno o dos electrones (***iones***), de modo que estos electrones pueden moverse por toda la red; del mismo modo que las moléculas de un gas se mueven libremente por todo el recinto que las contiene. Las únicas cargas que tienen libertad de movimiento son los electrones.

Un conductor está ***cargado*** *cuando tiene un exceso o un defecto de electrones; en el primer caso tiene carga negativa y en el segundo positiva.* Un conductor está en ***equilibrio electrostático*** *si sus cargas móviles*[14] *se encuentran en reposo en el sentido macroscópico*; es decir, cuando globalmente no se mueven en una dirección determinada como sucede por ejemplo en un circuito de corriente eléctrica.

1.8.2. Distribución de la carga en un conductor en equilibrio electrostático

El campo eléctrico en el interior de un conductor (cargado o descargado) en equilibrio electrostático ha de ser cero. De lo contrario existiría una fuerza neta sobre las cargas móviles que las pondría en movimiento en la dirección del campo y el conductor no estaría en equilibrio.

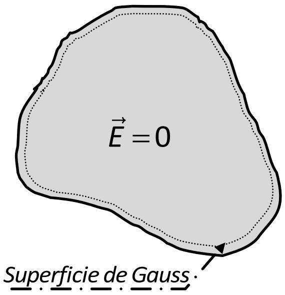


Una propiedad importante de los conductores cargados en equilibrio electrostático (que se deduce por aplicación de la ley de Gauss) es que su *carga eléctrica en exceso se almacena en su superficie*, como se ve en la figura. En efecto, consideremos una superficie de Gauss *S* interior al conductor que coincida prácticamente con su propia superficie, como ilustra la figura de la página siguiente. El teorema de Gauss aplicado a la superficie establece que,

$$\Phi = q_{int} / \varepsilon_0$$

donde q_{int} es la carga que encierra *S*; como *S* coincide prácticamente con la del conductor pero está dentro de él, q_{int} es también la carga en el interior del conductor. Ahora bien, puesto que el campo es nulo en todos los puntos de *S* por

[13] Las disoluciones iónicas (sal común en agua, por ejemplo) también permiten el movimiento de cargas en su interior (los iones de la sal). En estos conductores se mueven tanto los iones negativos como los positivos. En nuestro tema sólo nos vamos a referir a los conductores metálicos.
[14] Electrones, si está cargado negativamente, o "huecos" positivos, si está cargado positivamente.



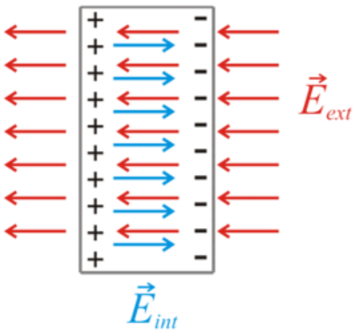
estar ésta dentro del conductor, también lo es el flujo a través de ella; entonces,

$$\Phi = q_{int}/\varepsilon_0 = 0 \Rightarrow q_{int} = 0$$

y como la carga no está en el interior del conductor, necesariamente tiene que encontrarse en la superficie del mismo.

Por otro lado, *la superficie del conductor debe ser equipotencial*, ya que si entre dos puntos de la misma existiera una diferencia de potencial, tendríamos también un campo no nulo, lo que haría que las cargas se movieran por la superficie y, en consecuencia, el conductor no se encontraría en equilibrio electrostático. Por la misma razón *todo el conductor ha de ser un volumen equipotencial*.

Es importante destacar que las ecuaciones de los campos eléctricos, deducidos por aplicación del teorema de Gauss, para la esfera, el hilo y la lámina son también válidas en el caso de que los materiales sean conductores. La única diferencia es que en este caso las cargas se distribuyen en la superficie de los mismos.



Supongamos un conductor descargado en el interior de un campo eléctrico externo $\vec{E}_{ext}$, como ilustra la figura. Como los conductores tienen electrones libres, éstos se verán sometidos a una fuerza eléctrica $\vec{F} = q_e\vec{E}_{ext}$ que los moverá en el sentido opuesto a $\vec{E}_{ext}$ (pues la carga del electrón, $q_e < 0$); es decir, en el conductor de la figura, los desplazará hacia la cara derecha, mientras que en la cara izquierda quedará un exceso de carga positiva. Esta distribución de cargas crea un campo eléctrico interno $\vec{E}_{int}$ en sentido opuesto a $\vec{E}_{ext}$ (ver figura).

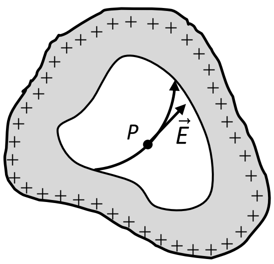
El desplazamiento de electrones cesará cuando el **campo eléctrico neto en el interior del conductor sea nulo**; o sea, cuando,

$$\vec{E}_{neto\ interior} = \vec{E}_{int} + \vec{E}_{ext} = 0$$

como afirma la ley de Gauss.

Si el campo externo fuera electromagnético, el efecto sería el mismo. Las ondas electromagnéticas están formadas por un campo eléctrico oscilante que induce un campo magnético también oscilante que se propagan a la velocidad de la luz. Si un campo electromagnético llega a un conductor en equilibrio electrostático, el campo eléctrico se anula en el interior del conductor, como hemos visto. Esto implica que no se puede generar el campo magnético, por lo que no hay onda.

Es importante destacar que el campo eléctrico en el interior de una cavidad de un conductor hueco en equilibrio electrostático también es cero, aun cuando dicho conductor esté sometido a un campo eléctrico externo y/o se encuentre cargado.



En efecto, supongamos que en el punto *P* de la cavidad del conductor de la figura el campo no es cero; entonces tendría que pasar por *P* una línea de fuerza. Como las líneas de fuerza no pueden ser cerradas (nacen en las cargas positivas y mueren en las negativas o en el infinito), necesariamente tendría que ir de un punto de la superficie interior del conductor a otro (ver figura). Pero esto no es posible porque entonces habría una diferencia de potencial entre dos puntos del conductor, lo que tampoco es posible puesto que un conductor en equilibrio electrostático es un volumen equipotencial; así que el campo eléctrico en una cavidad de un conductor es nulo. Como no hay campo en la cavidad, la aplicación de la ley de

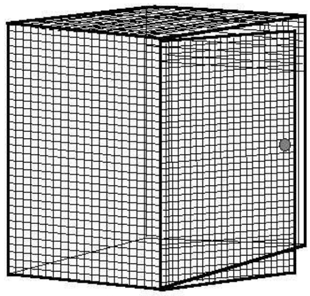
Gauss a una superficie dentro del conductor y muy próxima a la interior del mismo nos lleva a que la carga eléctrica en la superficie interna del conductor es cero.

1.8.3. Efecto jaula de Faraday y sus aplicaciones

El apantallamiento eléctrico de un conductor recibe el nombre de ***efecto jaula de Faraday***, porque fue descubierto por M. Faraday.

Este efecto se pone de manifiesto en numerosas situaciones cotidianas. Por ejemplo, el mal funcionamiento de los teléfonos móviles o de la wifi en el interior de un ascensor o en un edificio con estructura de malla de acero.

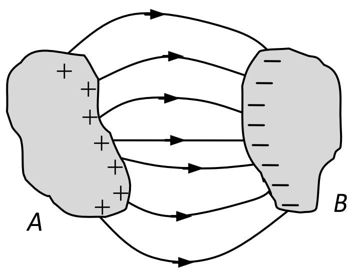
Si un conductor en equilibrio electrostático es hueco, un objeto en su interior estará protegido de cualquier campo eléctrico externo por el apantallamiento eléctrico. Muchos dispositivos están protegidos por una jaula de Faraday:



- Equipos electrónicos delicados, tales como repetidores de radio y TV situados en cumbres de montaña y expuestos a perturbaciones electromagnéticas causadas por las tormentas.
- Los microondas domésticos son jaulas de Faraday. Ello permite que las microondas salgan al exterior, pues son peligrosas.
- Los escáneres y los cables de conexión de antenas están provistos de jaulas de Faraday.
- Los dispositivos de audio de telefonía móvil emplean el efecto de jaula de Faraday para evitar interferencias de ondas electromagnéticas parásitas (ruido).
- Hay aparatos que sin estar provistos de jaula de Faraday actúan como tal: los aviones, los coches, los ascensores, etc.

Es importante destacar que el conductor hueco puede ser una malla como la mostrada en la figura. La única condición que tiene que cumplir es que las rendijas sean más pequeñas que la longitud de onda de la radiación electromagnética empleada.

1.8.4. Condensadores

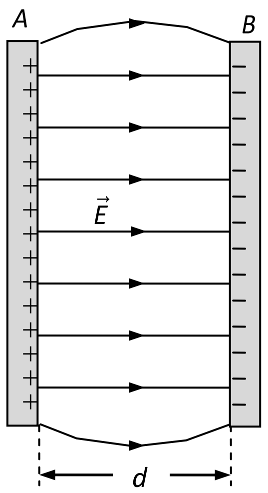


Dos conductores cargados con cargas iguales y opuestas y colocados próximos, de modo que sus campos eléctricos se influyan, forman lo que se llama un ***condensador***. En la figura se ha representado un condensador, las líneas de fuerza del campo eléctrico que crea y la distribución aproximada de cargas eléctricas en cada conductor. Tengamos en cuenta que cargas de signos opuestos se atraen, por lo que, como se pueden mover libremente en el interior del conductor, se colocan en las superficies interiores del mismo, como se aprecia en la figura.

Un concepto importante en los condensadores es la ***capacidad** (C)* que se define como *el cociente entre la carga que almacena y la diferencia de potencial entre los conductores que lo forman*; esto es,

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_A - V_B}}$$

que no depende más que de la geometría del condensador, del tamaño y del me-



dio material no conductor en el que se encuentra el condensador que recibe el nombre de ***dieléctrico***. De la definición se desprende que la unidad de capacidad en el SI es el *C/V*, que recibe el nombre de ***Faradio***.

En el caso particular de que los conductores sean láminas planas colocadas frente a frente a una distancia mucho menor que el tamaño de los conductores, tenemos un caso especial llamado ***condensador plano***; los conductores que lo forman reciben el nombre de ***armaduras***. La figura muestra una sección transversal de un condensador plano.

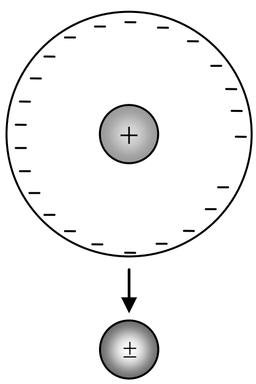
En este caso particular, la simetría del condensador y el teorema de Gauss permiten deducir que el campo ha de ser constante[15] (salvo en los bordes), perpendicular a las armaduras y dirigido de la positiva a la negativa, como ilustra la figura (líneas de fuerza paralelas e igualmente espaciadas).

Vimos en el punto 1.6 que la relación entre la diferencia de potencial entre dos puntos *A* y *B* de un campo eléctrico cuando éste es constante es,

$$E = \frac{V_A - V_B}{d}$$

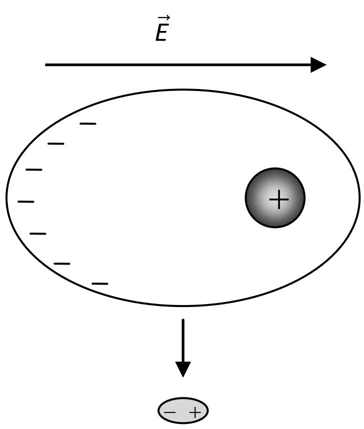
donde *d* representa la distancia más corta entre las superficies equipotenciales que pasan por *A* y por *B*. Puesto que las armaduras del condensador son superficies equipotenciales, $V_A - V_B$ es la diferencia de potencial entre las armaduras po sitiva y negativa y *d* la distancia más corta entre ellas.

1.8.5. Polarización de la materia



Como ya hemos dicho, la constante ε que aparece en la ley de Coulomb se denomina ***constante dieléctrica o permitividad*** y su valor depende del medio en que estemos. En el vacío alcanza su valor mínimo que es $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ $N\cdot m^2/C^2$ en el SI. La razón de la dependencia de la constante del medio hay que buscarla en la naturaleza eléctrica del mismo.

La materia está formada, como ya hemos mencionado, por átomos que se componen de electrones con carga negativa, protones con carga positiva y neutrones sin carga. Cuando un átomo se encuentra en una región donde no existen campos eléctricos, los centros de las cargas positivas y negativas coinciden, como se aprecia en la figura superior, y sus efectos se cancelan.

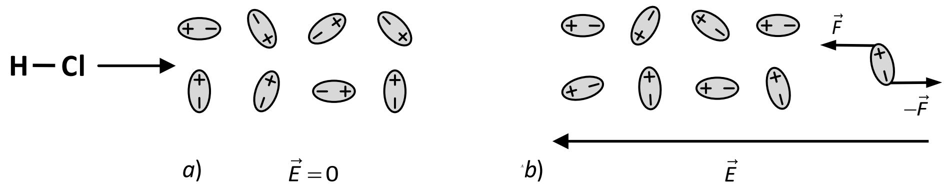


Cuando se aplica un campo eléctrico (figura inferior) los centros de las cargas ya no coinciden, al ejercer el campo una fuerza igual y de sentido opuesto sobre electrones y protones que "estira" el átomo. El fenómeno se denomina ***polarización*** y el átomo se ha convertido en un ***dipolo inducido***. El fenómeno de la polarización también se produce en las moléculas, aunque con mayor dificultad. Sin embargo, existen moléculas que forman dipolos de forma espontánea, sin intervención de campos eléctricos; se llaman ***moléculas dipolares***. Ello se debe a la diferencia de electronegatividad de los átomos que las forman; las moléculas de agua y de ácido clorhídrico son dos ejemplos característicos. En ausencia de cam-

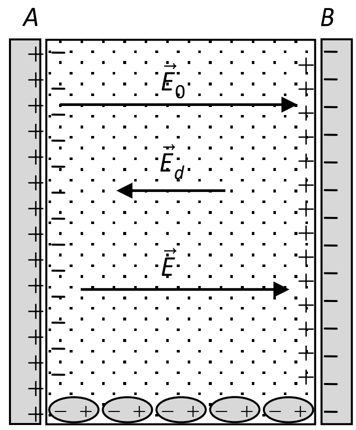
[15]Esto sólo se cumple cuando la distancia entre las armaduras es muy pequeña comparada con el tamaño de las mismas.

po eléctrico estos dipolos están orientados al azar (figura *a*), pero cuando se aplica un campo los dipolos se orientan en él (figura *b*) debido a las fuerzas iguales y opuestas (par de fuerzas) que el campo ejerce sobre las cargas de los dipolos.

Hay que subrayar que la polarización se produce sólo en las sustancias dieléctricas; en los conductores esto no tiene sentido porque las cargas se pueden mover



libremente. En definitiva, las sustancias dieléctricas situadas en un campo eléctrico se polarizan si son apolares y se orientan sus dipolos si son polares.



Veamos qué ocurre cuando se coloca un dieléctrico en el interior de un campo eléctrico, por ejemplo en el campo creado por un condensador plano. Los dipolos se orientan en el campo y crean (los propios dipolos) otro campo, ***campo inducido*** ($\vec{E}_d$), que se opone al creado por el condensador ($\vec{E}_0$), como se ve en la figura. Por este motivo el campo neto entre las armaduras de un condensador cargado ($\vec{E}$) es menor cuando se coloca un dieléctrico en él. La carga en el interior del dieléctrico se cancela dipolo a dipolo, pero no la que aparece en sus superficies (ver figura) que es igual y opuesta y se denomina ***carga ligada***; ésta carga es la responsable del campo inducido. En consecuencia el campo en el interior del condensador es,

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}_d$$

pero como $\vec{E}_0$ y $\vec{E}_d$ tienen la misma dirección y sentidos opuestos, la magnitud del campo neto (E) es,

$$E=E_0-E_d$$

menor que el que habría si no estuviera el dieléctrico (E_0).

La disminución de la magnitud del campo eléctrico por la presencia de los dipolos inducidos de los dieléctricos es la causa de que la constante que aparece en la ley del Coulomb (k = $1/4\pi\varepsilon$) dependa del medio material. En efecto, como la fuerza que sufre una carga q en un lugar en el que el campo es $\vec{E}$ es,

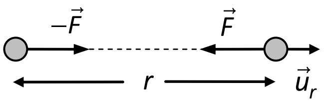
$$\vec{F}=q\vec{E}$$

es menor cuando la carga se encuentra en el interior de un dieléctrico (ya que E es menor). Por lo tanto la constante k también ha de ser menor (y ε mayor), lo que significa que el valor máximo de k (y el menor de ε) se alcanzan en el vacío, esto es, en ausencia de dieléctrico.

1.9. Analogías y diferencias con el campo gravitatorio

Como ya hemos dicho las expresiones matemáticas de las fuerzas gravitatoria y eléctrica son formalmente idénticas. Ello da lugar a que los campos gravitatorio y eléctrico presenten importantes de analogías; sin embargo, son fenómenos distintos y, en consecuencia, también presentan importantes diferencias.

Analogías



- Las fuerzas gravitatoria y electrostática entre partículas están dirigidas a lo largo de la línea que las une, son proporcionales al producto de dos propiedades fundamentales de la materia (masa y carga) y disminuyen con el cuadrado de la distancia que separa a las partículas. Esto es,

$$\vec{F}\alpha\frac{m\,m'}{r^2}\vec{u}_r \;\text{ y }\; \vec{F}\alpha\frac{q\,q'}{r^2}\vec{u}_r$$

- Son fuerzas de largo alcance, puesto que la interacción entre dos masas o dos cargas solo se anula en el infinito.
- Ambos son conservativos, pues además de ser centrales, las fuerzas entre partículas son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que las separa; esto es, la magnitud de la fuerza depende de la que separación entre las partículas. Por tanto, ambos admiten una energía potencial asociada y es posible definir un potencial, ya sea gravitatorio o eléctrico, donde,

$$V_g = E_p(grav.)/m \quad \text{y} \quad V_e = E_p(eléctrica)/q$$

- Una consecuencia del carácter conservativo de los campos es que en ambos se puede definir un campo escalar de potenciales.
- La presencia de una carga o una masa produce una "deformación" en la región del espacio en la que se manifiestan los efectos del campo creando, de ese modo, un campo gravitatorio o eléctrico. Esta "deformación" tan solo se pone de manifiesto al situar en los puntos en los que existe el campo una masa o una carga prueba que permita detectar su presencia.
- La intensidad del campo en ambos se calcula como el cociente entre la respectiva fuerza y la propiedad característica del campo (masa, carga); es decir,

$$\vec{g} = \vec{F}_g/m \quad \text{y} \quad \vec{E} = \vec{F}_e/q$$

- Las líneas de fuerza de ambos campos son abiertas y normales a las superficies equipotenciales.
- En ambos casos se cumple el teorema de Gauss del flujo a través de una superficie cerrada; es decir, $\Phi_g = -4\pi G\,m_{int}$ y $\Phi_e = q_{int}/\varepsilon_0$

Diferencias

- La fuente del campo eléctrico es la carga y la del gravitatorio la mas. Solo existe un tipo de masa, pero hay dos clases de carga eléctrica.
- La magnitud de las fuerzas gravitatorias no depende del medio en el que se encuentran, por lo que la constante *G* es universal. En el caso de las fuerzas eléctricas sí., lo que significa que la constante *K* no es universal.
- Las fuerzas de interacción son siempre atractivas en el caso del campo gravitatorio. En el campo eléctrico pueden ser atractivas o repulsivas. Este hecho conlleva que las líneas de fuerza en el campo gravitatorio están dirigidas siempre hacia el cuerpo que crea el campo; mientras que en el eléctrico pueden estar dirigidas hacia el cuerpo que crea el campo o hacia fuera de él.
- El campo gravitatorio no varía por el hecho de que el cuerpo que lo crea esté en movimiento; sin embargo, en el caso de cargas en movimiento nos encontramos (como veremos en la segunda parte de este tema) con la interacción magnética, además de la eléctrica.

- Si comparamos los valores de *G*, *k*, la carga y la masa de las partículas elementales, nos encontramos que la interacción electrostática es mucho más intensa que la gravitatoria. Por ejemplo, la fuerza de repulsión eléctrica entre dos protones es unas $1{,}35\cdot10^{20}$ veces mayor que la fuerza de atracción gravitatoria
- Los campos gravitatorio y eléctrico son consecuencia de dos propiedades diferentes de la materia: la masa y la carga.
- En la interacción gravitatoria las líneas de fuerza "mueren" en el cuerpo que crean el campo, que recibe el nombre de *sumidero*. En la interacción eléctrica las líneas de fuerza pueden "morir" en el cuerpo que crea el campo (***sumidero***) o "nacer" en él; en este caso se denomina ***fuente***.